



INSTITUTO de ENSEÑANZAS a DISTANCIA de ANDALUCÍA

ESPAD Nivel I

**Ámbito Científico
Tecnológico**

Contenidos

El agua la base de nuestra existencia: Geometría

En las televisiones se habla a veces de inundaciones, de la cantidad de agua que cae por metro cuadrado. Si en algún momento has comprado agua embotellada, seguramente has elegido un tipo de envase u otro en función de su capacidad (volumen que alberga) o de su forma. Si piensas en estos dos hechos, la geometría está ligada a nuestra relación con el agua.



Imagen de jarmoluk en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)

Si piensas en el cuerpo humano partimos de estructuras sencillas, para formar estructuras más complejas. Algo parecido pasa con la geometría.

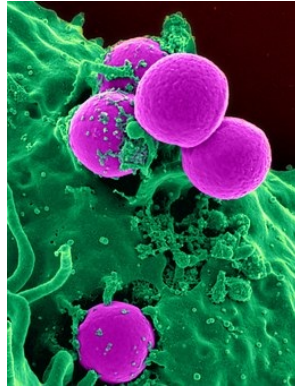


Imagen de skeeze en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)

Digamos que la "célula" de la geometría es el punto, y a partir de ella podemos construir estructuras más complejas, como segmentos, líneas poligonales, y polígonos.

1.1. Polígonos

Polígonos

Al unir dos puntos utilizando una regla, obtenemos un segmento. Al ir encadenando segmentos vamos obteniendo una línea poligonal. Si la línea poligonal la cerramos uniendo el último punto con el primero, hemos encerrado una región del plano, llamada polígono.

En la siguiente escena de Geogebra puedes practicar con esta idea:



Escena de user10235 en [Geogebra.org](https://www.geogebra.org/m/user10235). Licencia CC

Importante

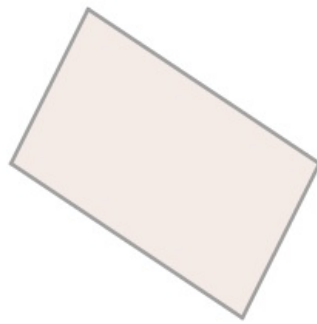
La superficie contenida por una línea poligonal cerrada se llama polígono.

En la siguiente presentación, descubrirás cuáles son los elementos de un polígono y en función de ellos los tipos de polígonos que tenemos:



Comprueba lo aprendido

Observa la siguiente figura:



De entre las siguientes opciones señala las correctas:

☐ Polígono cóncavo

☐ Cuadrilátero.

☐ Paralelogramo

☐ Rectángulo

Solución

1. Incorrecto
2. Correcto
3. Correcto
4. Incorrecto

Reflexiona

Repasa la presentación anterior y observa los elementos del polígono y reflexiona sobre cuáles de ellos son exclusivos de los polígonos regulares.

El centro solo lo encontramos en polígonos regulares, y los otros elementos relacionados con él (radio y apotema) también.

Círculo y circunferencia

Existen figuras planas que no están limitadas por una línea poligonal, pero sí por una línea curva. Como es el caso del círculo, que está delimitado por una línea curva cerrada llamada circunferencia, y que cumple una condición muy especial.

Si tomamos un punto del plano, O , y un número positivo r , y buscamos todos los puntos del plano que están a distancia r del punto O , obtendrás una curva plana y cerrada llamada circunferencia.

Importante

El círculo es la parte del plano limitada por la circunferencia.

En la circunferencia se pueden distinguir los siguientes elementos:

- **Centro:** es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.
- **Radio:** es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.
- **Cuerda:** es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro:** es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Arco:** es la porción de circunferencia comprendida entre dos de sus puntos.
- **Semicircunferencia:** es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.



Imagen de elaboración propia

Ejercicio resuelto

En una circunferencia cuyo radio mide 5 cm, ¿cuál es la distancia entre cualquiera de sus puntos y el centro? ¿y su diámetro?

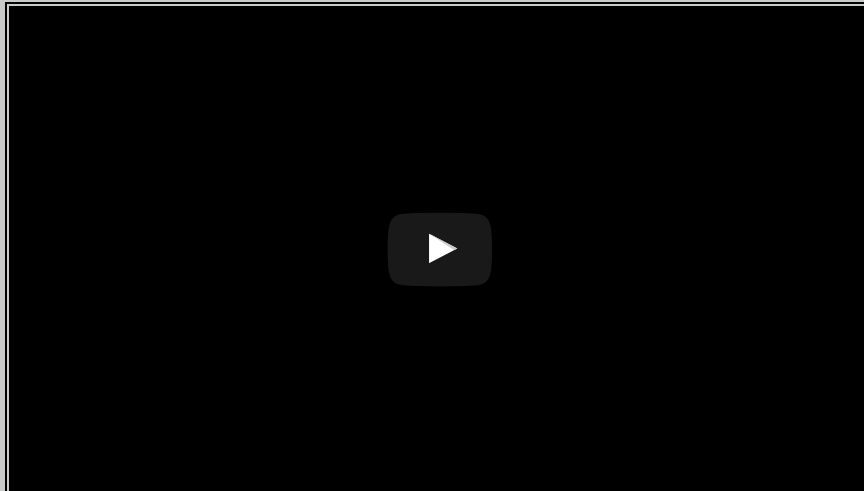
El radio de la circunferencia precisamente se define como la distancia existente entre cualquiera de sus puntos y el centro. Luego es 5 cm. El diámetro es el doble del radio, luego es 10 cm

Para saber más

Mandalas y polígonos estrellados

Un polígono regular estrellado se construye uniendo los vértices no consecutivos, de un polígono regular convexo, de forma continua. Forma parte de nuestro arte desde hace miles de años, y son especialmente frecuentes en el arte islámico.

Una aplicación de este tipo de formas poligonales son LOS MANDALAS.



¿Qué es el perímetro de una figura plana?

La palabra perímetro, al igual que otras palabras relacionadas con las matemáticas se utilizan en un lenguaje cotidiano. Observa, la siguiente noticia:

≡ EL PAÍS

ACTUALIDAD

Montilla dice que el perímetro del incendio de Tarragona "está casi cerrado", pero no controlado

Según la Generalitat se ha controlado la cabeza del incendio, que ya ha devorado 1.140 hectáreas. - Los bomberos confían en terminar el trabajo mañana si el viento no se reaviva

Captura de pantalla del elpais.com

Ya hemos visto que un polígono está encerrado por una línea poligonal cerrada. Lo mismo ocurriría con el círculo y la circunferencia. Si medimos esta línea poligonal, y la longitud de la circunferencia estamos calculando el perímetro de la figura plana.

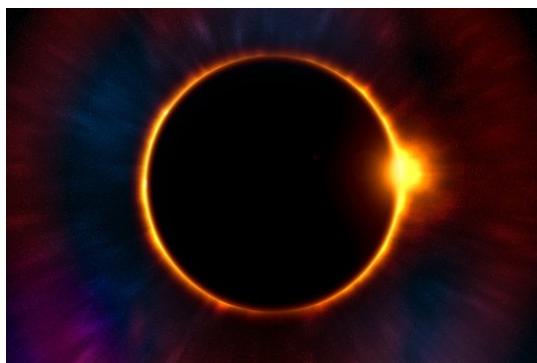


Imagen de [intographics](https://www.pixabay.com/) en Pixabay. Licencia CC

Importante

El **perímetro** de una figura plana, en el caso de los polígonos es la suma de las longitudes de sus lados. El perímetro de un círculo sería la longitud de la circunferencia (L), que se calcula con la fórmula: $L=2\pi r$, donde r es el radio.

Ejercicio resuelto

Si tomamos una cuerda de 0,5 metros y queremos hacer con ella un círculo de radio 5 cm y un pentágono regular de lado 3 cm, ¿tendremos suficiente?

Vamos a calcular por un lado la longitud de la circunferencia (L):

$$L=2\cdot\pi\cdot 5=10\cdot\pi=31,4 \text{ cm}$$

Ahora calculemos el perímetro del pentágono regular. Para calcular el perímetro (P), tenemos que sumar la longitud de todos sus lados:

$$P=5\cdot 3=15 \text{ cm.}$$

Al sumar ambas cantidades, obtenemos 46,4 cm que es menor que 0,5 m (50 cm).

¿Qué es el área de una figura plana?

El perímetro de una figura encierra una porción del plano, cuya superficie podemos calcular.

Importante

El **área** de una figura corresponde a la medida de la superficie que dicha figura ocupa.

Para saber el área de una figura plana, recurrimos a distintos métodos según el tipo de figura con la que nos encontremos.

Cálculo por fórmulas

Por ejemplo, para los triángulos, trapecios, paralelogramos y polígonos regulares tenemos fórmulas que nos ayudan a calcular el área de la figura, conociendo sus elementos característicos. En la siguiente imagen puedes ver las principales:

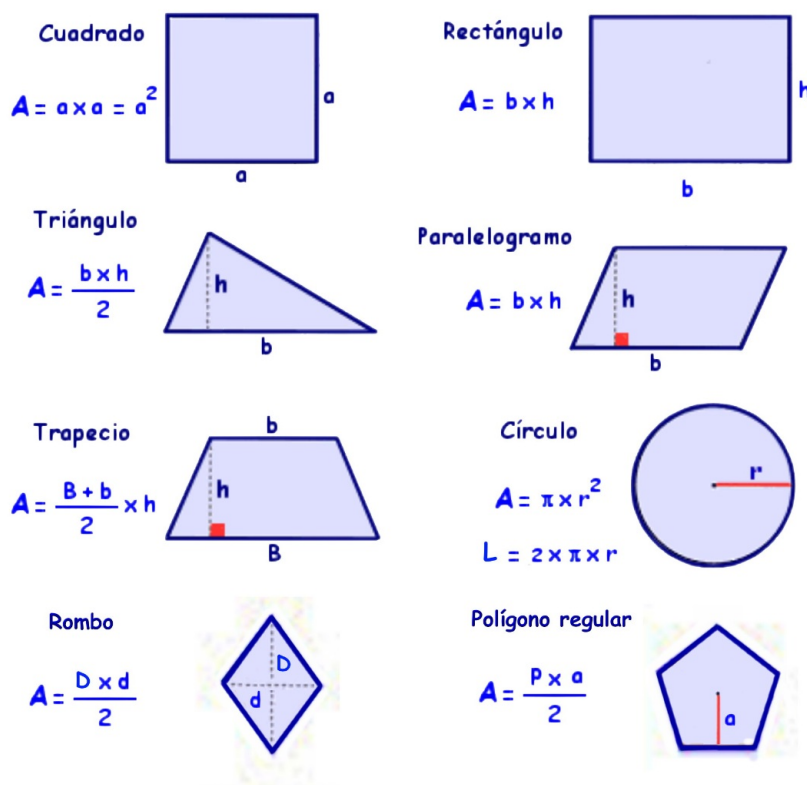


Imagen de Rodrigo en [Geogebra.org](https://geogebra.org). Licencia CC

Cálculo de áreas por descomposición

Cuando nos encontramos con un polígono irregular, para calcular el área recurrimos a la descomposición en figuras más simples y conocidas. Mira el siguiente ejemplo:

En el siguiente ejemplo veremos cómo calcular el área de un polígono irregular por el método de descomposición. La estrategia a seguir es dividir el polígono original en polígonos cuyas áreas serán más sencillas de calcular (triángulos y cuadriláteros).

Pulsa sobre el botón de avance para empezar

iniciar

Escena de Josep Maria Navarro Canut [Proyecto Descartes](https://proyecto-descartes.org). Licencia CC

Comprueba lo aprendido

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

El área de un hexágono regular de 2 dm de lado 1,73 dm de apotema y es 10,38 dm².

☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

El perímetro del hexágono regular sería $6 \cdot 2 = 12$

Su área es $\frac{12 \cdot 1,73}{2} = 10,38$

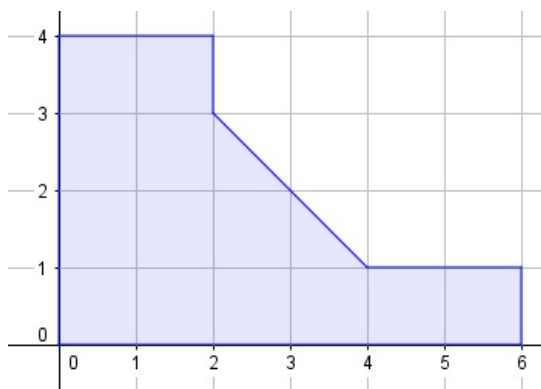
El área de un rectángulo de 5 m de base y 2,3 m de altura es 9,12 cm²

☐ Verdadero ☐ Falso

Falso

El área del rectángulo es base por altura. Luego si tiene 5 m de base y 2,3 de altura el área tendría que ser $5 \cdot 2,3 = 11,5$ m²

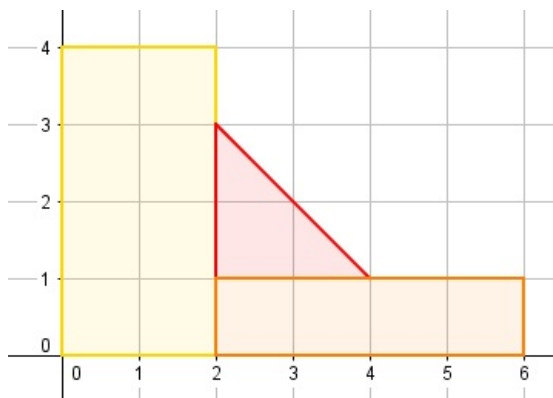
El área de la siguiente figura es 14 cm², suponiendo que la cuadrícula tiene 1 cm de lado



☐ Verdadero ☐ Falso

Verdadero

La figura puede descomponerse en dos rectángulos y un triángulo:



El área del rectángulo amarillo sería 8 cm², la del rectángulo naranja 4 cm² y la del triángulo 2 cm². Entre las tres hacen un total de 14 cm².

Curiosidad

Triangulación

Cualquier polígono puedes descomponerse en triángulos, sea cual sea su forma y por tanto, independientemente del tipo de polígono.

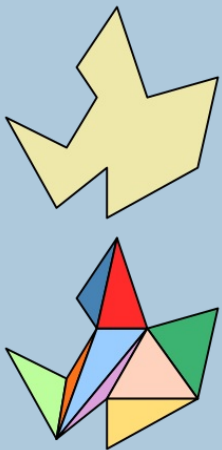


Imagen de Magisternmathematicae
en [Wikimedia Commons](#). Licencia CC

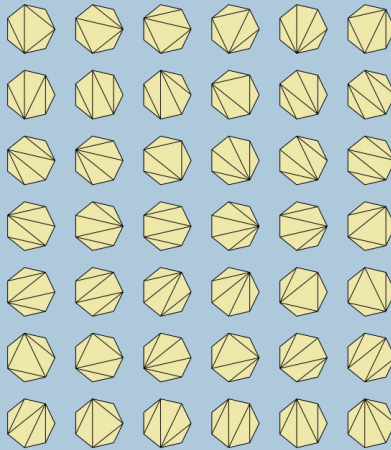


Imagen de Eric Détrez
en [Wikimedia Commons](#). Licencia CC

Para ello solo tenemos que unir vértices no consecutivos. Un polígono de n -vértices, se puede descomponer en n triángulos, y hay distintas maneras de hacerlo.

2. Cuerpos geométricos

Nosotros percibimos el mundo en tres dimensiones, aunque en ocasiones no nos interese hacer referencia a una de ellas. Por ejemplo, cuando hablamos de un terreno del campo de fútbol, en condiciones normales no nos interesa la cantidad de tierra que hay para que crezca el césped, solo nos interesa la superficie o las dimensiones que tiene.

Pero si tomamos una caja de zapatos y queremos que en ella quepa una bota del número 41, sí nos interesa saber las tres dimensiones que tiene la caja (ancho, alto y largo).



Imagen de rebel1965 en [Pixabay](#). Licencia [CC](#)

2.1. Poliedros y cuerpos redondos

Cuerpos geométricos

Los observamos diariamente en los edificios, cajas, balones de fútbol... hasta en una de la más grandes construcciones creadas por el ser humano: las pirámides de Gizah (Egipto)

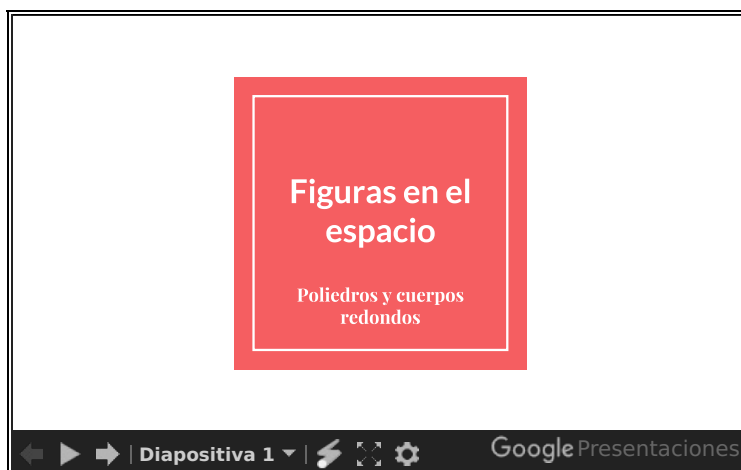


Imagen de Pexels en [Pixabay](#). Licencia CC

Importante

Se denominan **cuerpos geométricos** o **sólidos** a aquellos cuerpos que ocupan un volumen en el espacio desarrollándose por lo tanto en las tres dimensiones de alto, ancho y largo; y están compuestos por figuras geométricas

En la siguiente presentación puedes ver los distintos cuerpos geométricos y sus principales características:



Utiliza la siguiente actividad para repasar algunos de los conceptos vistos en la presentación.

Comprueba lo aprendido

Completa el siguiente texto:

Un poliedro es un que está limitado por cuatro o más . A cada uno de ellos se les conoce como . A los lados de estas caras se les conoce como . Los son los puntos comunes de las aristas.

Un es un cuerpo geométrico obtenido a partir de una figura plana que gira alrededor de un . Hay tres cuerpos de revolución que aparecen con frecuencia: el , el cono y la .

Comprobar

Reflexiona

Los siguientes objetos son de uso cotidiano. Indica qué tipos de cuerpos geométricos son, y a qué subtipos pertenecen:

Imagen 1



Imagen de Meditations en Pixabay. Licencia CC

Imagen 2



Imagen de Pexels en Pixabay. Licencia CC

En la imagen 1 aparecen cuerpos de revolución. Son cilindros.

En la imagen 2 aparece una caja, que es un poliedro, un prisma y como todos sus lados son paralelos dos a dos, es un ortoedro.

Los poliedros tienen una propiedad muy característica que relaciona el número de caras con el de vértices y el de aristas, se conoce con el nombre de Teorema o Fórmula de Euler

Importante

El teorema Euler nos indica la relación existente entre el número de caras, aristas y vértices de un poliedro convexo:

$$C + V - A = 2$$

donde C es el número de caras, V el número de vértices y A el número de aristas.

En la siguiente escena puedes practicar con el Teorema de Euler y con algunos conceptos de los pistos en la presentación.

Antes de empezar
Contenidos
Ejercicios
Autoevaluación
Para enviar al tutor
Para saber más

2. Tipos de poliedros

Relación de Euler

Describe el poliedro y contabiliza sus elementos

Tipo de poliedro	Caras C	Vértices V	Aristas A	Caras+Vértices C+V
<input type="text"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0

parar

Desarrollo plano de un cuerpo geométrico

El desarrollo de un poliedro es la figura plana que se obtiene al extenderlo sobre un plano. En la siguiente imagen está enlazado un pdf en el que puedes ver los desarrollos planos de distintos poliedros. Estos desarrollos incluyen unas pestañas por si te animas a imprimirlos y montarlos. Te lo recomendamos porque es un ejercicio muy visual y entretenido, y tener los poliedros en la mano te puede ayudar a entender sus propiedades:



Para montarlo solo tienes que hacer dobleces en las aristas y en las pestañas, y unirlos.

Curiosidad

Dados de rol

Un juego de rol es un juego en el que, tal como indica su nombre, uno o más jugadores desempeñan un determinado rol, papel o personalidad. En estos juegos se usan dados con formas de poliedros (la mayoría regulares) que le aportan al juego la parte de azar. Se suelen usar dados con estas formas ya que por su forma se ofrece equidad en las tiradas.



Imagen de Diacrítica en [Wikimedia Commons](#). Licencia CC

2.2. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Área y volumen de un cuerpo geométrico

Cuando cogemos una lata de tomate, podemos hablar de continente y de contenido. Por continente, entendemos al objeto y por contenido a lo que contiene dicho objeto.

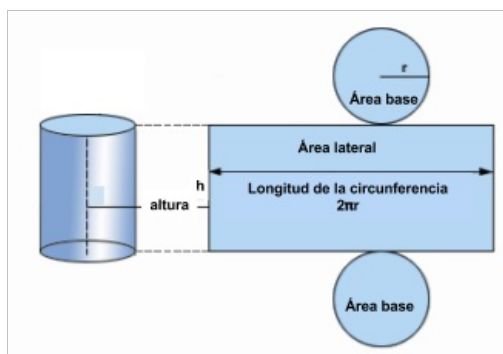
De igual forma podemos hablar del área de un cuerpo geométrico, que sería la cantidad de metal que necesitamos para hacer la lata y del volumen, que sería la cantidad de tomate que alberga la lata.



Imagen de markusspiske en Pixabay. Licencia CC

¿Cómo se calcula el área de un cuerpo geométrico?

Se calcula a partir del desarrollo plano. Tomemos por ejemplo el desarrollo plano de un cilindro:



Si nos fijamos está compuesto por el área lateral y dos veces el área de la base.

Importante

Llamamos **área lateral** a la suma de las áreas de todas las caras laterales de un cuerpo geométrico. Llamamos **área total** a la suma del área de las bases y del área lateral de un cuerpo geométrico.

Lo expresamos así:

$$A_{\text{TOTAL}} = A_B + A_L$$

Comprueba lo aprendido

Fijándote en el desarrollo del cilindro, ¿cuál crees que sería el área del cilindro?

 **Sugerencia**

- ☐ $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + \pi \cdot r^2$
- ☐ $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$
- ☐ $A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Fíjate que tendríamos la base superior y la base inferior

Opción correcta

No es el área total, solo el lateral

Solución

1. **Incorrecto** (Retroalimentación)

2. Opción correcta (Retroalimentación)
3. Incorrecto (Retroalimentación)

¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo geométrico?

En cuerpos geométricos como el prisma y el cilindro, calculamos el área de la base y multiplicamos por la altura de la figura. Para la esfera, el cono y las pirámides las fórmulas son más complejas.

En la siguiente tabla se recogen las principales fórmulas para el cálculo de las áreas y los volúmenes de algunos cuerpos geométricos:

Cuerpos geométricos	Área total	Volumen
CUBO (arista a)	$A_T = 6 \cdot a^2$	$V = a \cdot a \cdot a = a^3$
PRISMA RECTO (altura h)	$A_T = A_L + 2 \cdot A_B = P_B \cdot h + 2 \cdot A_B$ P _B es el perímetro de la base	$V = A_B \cdot h$
PIRÁMIDE RECTA (altura h, apotema lateral a)	$A_T = \frac{P_B \cdot a}{2} + A_B$	$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$
CILINDRO (radio r y altura h)	$A_T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \pi \cdot r^2$	$V = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$
CONO (radio r, generatriz g y altura h)	$A_T = A_B + \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$
ESFERA (radio r)	$A_T = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

Ejercicio resuelto

Se quiere construir un depósito para agua de lluvia en forma cilíndrica, de 12 m de altura y de radio de la base 37 m. Calcula la superficie del depósito (no tendría cubierta) y el volumen de agua máximo que pueda albergar.

El área total, sería la suma del área lateral y de una de las bases del cilindro, ya que no está tapado:

$$A_T = 2\pi \cdot 37 \cdot 12 + \pi \cdot 37^2 = 7090,57 \text{ m}^2$$

Para calcular el volumen, multiplicamos el área de la base por la altura:

$$V = \pi \cdot 37^2 \cdot 12 = 51610 \text{ m}^3$$

Ejercicio resuelto

Una piscina con forma de ortoedro tiene 8 m de largo y 4 m de ancho. Si sabemos que como máximo puede contener 51,2 m³ de agua. Averigua la profundidad de la piscina.

Un ortoedro es un prisma recto. Para calcular su volumen multiplicaríamos el área de la base por la altura. El área de la base sería el ancho por el largo. Luego si llamamos h a la profundidad y aplicamos la fórmula del volumen tendríamos:

$$51,2 = 8 \cdot 4 \cdot h \rightarrow 51,2 = 32h$$

Estamos ante una ecuación de primer grado. Despejando la h obtendríamos:

$$h = 51,2 / 32 = 1,6 \text{ m de profundidad}$$

Importante

Polígonos

Un polígono es la superficie interior de una línea poligonal cerrada. Pueden ser: cóncavos o convexos y regulares (todos sus lados iguales) o irregulares (algún lado desigual).

También podemos clasificarlos en función de su número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos...

Los triángulos pueden clasificarse en: acutángulos, rectángulos y obtusángulos, según sus ángulos y en: equiláteros, isósceles y escalenos, según sus lados. Los cuadriláteros pueden ser: paralelogramos, trapecios y trapezoides, según tengan lados paralelos o no. Los paralelogramos se dividen en: cuadrados, rectángulos, rombos y romboides.

Circunferencia y círculo

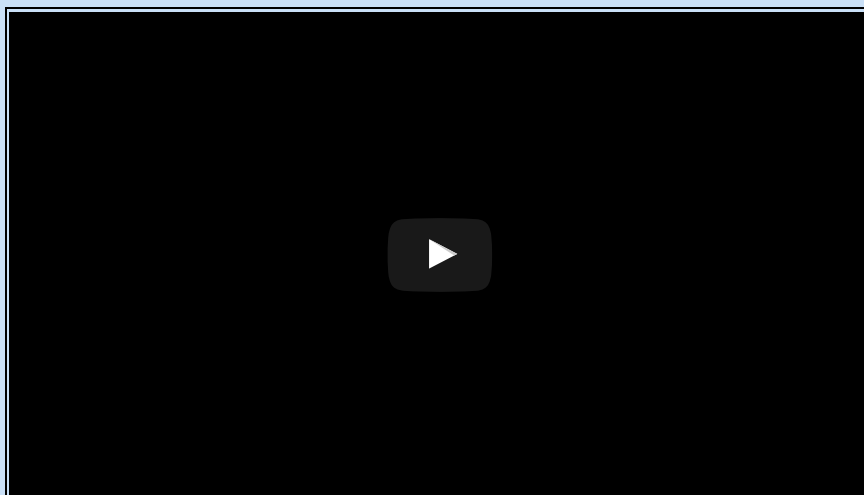
Una circunferencia es una línea curva cerrada cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Es la figura plana comprendida en el interior de una circunferencia.

Importante

Cálculo de perímetros y áreas

En el siguiente vídeo se repasan las fórmulas del cálculo de áreas de las principales figuras planas. Además, viene demostradas visualmente lo que puede ayudar a memorizarlas y comprenderlas:



Vídeo de Marcos Alejandro Erosa alojado en [Youtube](#)

Importante

Poliedro. Área y volumen de un poliedro.

Es la región del espacio limitada por polígonos. En el siguiente vídeo repasan los tipos de poliedros, sus elementos y el cálculo de su área y su volumen:



Vídeo de Matias Vidoret alojado en [Youtube](#)

Importante

Cuerpos redondos

Un cuerpo de revolución es aquel que se origina al girar una figura plana alrededor de un eje. Las caras de un cuerpo de revolución son curvas. En el siguiente vídeo puedes repasar los conceptos relacionados con los cuerpos de revolución que hemos estudiado: cilindro, cono y esfera.



Vídeo de unprofesor alojado en [Youtube](#)

Ejercicio resuelto

Cálculo de áreas de polígonos regulares

[Antes de empezar](#) [Contenidos](#) [Ejercicios](#) [Autoevaluación](#) [Para enviar al tutor](#) [Para saber más](#)

 **Para practicar**

Áreas de polígonos 

elige opción ▼

Elige el tipo de ejercicio que prefieras.

Escena de Josep Maria Navarro Canut alojada en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)

Ejercicio resuelto

Cálculo de áreas de triángulos y cuadriláteros



Para practicar

Áreas de triángulos y cuadriláteros



elige opción

Elige el tipo de ejercicio que prefieras.



Escena de Josep Maria Navarro Canut alojada en [Proyecto Descartes](#). Licencia [CC](#)

Reflexiona

Un poliedro que cumple el Teorema de Euler, ¿podría tener el mismo número de caras y de aristas?

No es posible, pues según la fórmula de Euler si tiene el mismo número de caras que de aristas, los vértices tendrían que ser 2, y no existe un poliedro con dos vértices.

Ejercicio resuelto

Se va a restaurar el lateral y la parte superior de una torre con forma de prisma octogonal de 12 m de alta. La base es un octógono regular de 3 m de lado y 3,62 metros de apotema. Si la empresa de restauración cobra 226 euros por cada metro cuadrado, ¿cuál será el precio de la restauración?

$$\text{Área de la base superior: } AB = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8,45}{2} = 236,6 \text{ m}^2$$

$$\text{Área lateral: } AL = 8 \cdot 49 \cdot 7 = 2744 \text{ m}^2$$

Superficie que se va a restaurar:

$$AL + AB = 2744 + 236,6 = 2980,6 \text{ m}^2$$

Precio de la restauración:

$$= 2980,6 \cdot 221 = 658712,6 \text{ euros}$$

Ejercicio resuelto

Sabiendo que el radio de la Tierra es 6370 km, calcula la superficie de nuestro planeta.

El área de la esfera es $A=4\pi r^2$, luego como conocemos el radio podemos averiguar su superficie.

$$A=4\cdot\pi\cdot 6370=509904363,8 \text{ km}^2$$

Ejercicio resuelto

¿Qué volumen de agua puede albergar un acuario con forma de prisma recto cuadrangular (ortoeдро), si tiene de dimensiones 120 x 60 x 50?

Si el especialista nos indica que como máximo deberíamos introducir un pez por cada 4500 cm³ (4,5 litros), ¿cuántos peces como máximo entrarán en nuestro acuario?

El Volumen de la pecera es de 360000 cm³, como un pez necesita unos 4500 cm³, como mucho podremos introducir 80 peces en nuestro acuario.

Aviso legal

El presente texto (en adelante, el "**Aviso Legal**") regula el acceso y el uso de los contenidos desde los que se enlaza. La utilización de estos contenidos atribuye la condición de usuario del mismo (en adelante, el "**Usuario**") e implica la aceptación plena y sin reservas de todas y cada una de las disposiciones incluidas en este Aviso Legal publicado en el momento de acceso al sitio web. Tal y como se explica más adelante, la autoría de estos materiales corresponde a un trabajo de la **Comunidad Autónoma Andaluza, Consejería de Educación (en adelante Consejería de Educación)**.

Con el fin de mejorar las prestaciones de los contenidos ofrecidos, la Consejería de Educación se reservan el derecho, en cualquier momento, de forma unilateral y sin previa notificación al usuario, a modificar, ampliar o suspender temporalmente la presentación, configuración, especificaciones técnicas y servicios del sitio web que da soporte a los contenidos educativos objeto del presente Aviso Legal. En consecuencia, se recomienda al Usuario que lea atentamente el presente Aviso Legal en el momento que acceda al referido sitio web, ya que dicho Aviso puede ser modificado en cualquier momento, de conformidad con lo expuesto anteriormente.

1. Régimen de Propiedad Intelectual e Industrial sobre los contenidos del sitio web

1.1. Imagen corporativa

Todas las marcas, logotipos o signos distintivos de cualquier clase, relacionados con la imagen corporativa de la Consejería de Educación que ofrece el contenido, son propiedad de la misma y se distribuyen de forma particular según las especificaciones propias establecidas por la normativa existente al efecto.

1.2. Contenidos de producción propia

En esta obra colectiva (adecuada a lo establecido en el artículo 8 de la Ley de Propiedad Intelectual) los contenidos, tanto textuales como multimedia, la estructura y diseño de los mismos son de autoría propia de la Consejería de Educación que promueve la producción de los mismos.

