

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

1 Ecuaciones de primer grado. Resolución

- Una ecuación de primer grado con una incógnita es una igualdad del tipo $a \cdot x + b = c$ que solo es cierta para determinados valores de la incógnita. Estos valores son las soluciones de las ecuaciones.
- Resolver una ecuación es hallar su solución. Para ello:
 - Se quitan los paréntesis.
 - Se quitan los denominadores.
 - Se agrupan términos que tienen incógnita en un miembro y los independientes en el otro.
 - Se suman o restan los términos de cada miembro de la ecuación.
 - Se despeja la incógnita.

132 Resuelve la ecuación $2 \cdot (3 - x) - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - (2x - 3)$

1.º Quitamos los paréntesis: $6 - 2x - \frac{8x + 2}{3} = \frac{1 + x}{2} - 2x + 3$

2.º Quitamos denominadores: $\frac{36}{6} - \frac{12x}{6} - \frac{16x + 4}{6} = \frac{3 + 3x}{6} - \frac{12x}{6} + \frac{18}{6} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 36 - 12x - 16x - 4 = 3 + 3x - 12x + 18$

3.º Agrupamos los términos que llevan x: $-12x - 16x - 3x + 12x = 3 + 18 - 36 + 4$

4.º Sumamos los términos de cada miembro de la ecuación: $-19x = -11$

5.º Despejamos la incógnita: $x = \frac{-11}{-19} = \frac{11}{19}$

133 Estudia si los valores indicados son soluciones de las ecuaciones.

Ejemplo $2x + 5 = 3 - (6 + x)$ $x = 2$

Sustituimos el valor dado en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad.

1.º miembro $2 \cdot 2 + 5 = 9$
 2.º miembro $3 - (6 + 2) = -5$ } Como los valores no son iguales, no es solución.

a) $2(x + 1) - 3 = 4x + 9$ $x = -5$

b) $\frac{x + 4}{2} = 2 - x$ $x = 0$

- 134 Al resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se ha obtenido la igualdad $-3x = 4$. Solo falta despejar x . Indica cuáles de las siguientes opciones son correctas.

a) $x = \frac{4}{-3}$

b) $x = \frac{4}{3}$

c) $x = -\frac{4}{3}$

- 135 Resuelve las siguientes ecuaciones y comprueba la solución obtenida.

Ejemplo $2 - x + 4x = 8x + 12$

$$-x + 4x - 8x = 12 - 2$$

$$-5x = 10 = x \Rightarrow \frac{10}{-5} = -2$$

Comprobamos si es solución sustituyendo el valor obtenido en la ecuación inicial.

$$\left. \begin{array}{l} 1.^{\text{er}} \text{ miembro } 2 - (-2) + 4 \cdot (-2) = 2 + 2 - 8 = -4 \\ 2.^{\text{o}} \text{ miembro } 8 \cdot (-2) + 12 = -16 + 12 = -4 \end{array} \right\} \text{ Como los dos miembros de la ecuación son iguales, la solución es correcta.}$$

a) $5x - 4 = 3x + 2$

b) $x - 9 - 6x + 4 = 0$

c) $4x - 10 + 3x = 5 + 9x - 7 - x$

d) $8 - x + 7 = 3x + 15$

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

136 Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado en las que aparecen paréntesis.

Ejemplo $3 \cdot (1 - x) + 2x - 5 = 7x - (4x + 2) - 6$

$$3 - 3x + 2x - 5 = 7x - 4x - 2 - 6$$

$$-3x + 2x - 7x + 4x = -2 - 6 - 3 + 5$$

$$-4x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{-4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

a) $10 + (5x - 6) - 4x = 2 - (3x - 1)$

b) $8 - 2(x + 4) + 9x = 5x + 3(1 - 2x)$

c) $1 - 5x + 4(2 - x) = 9 - (1 - 7x) - 2(x + 4)$

137 Resuelve las siguientes ecuaciones con denominadores.

Ejemplo $\frac{x+5}{(4)} = \frac{2-3x}{(6)}$ \rightarrow m.c.m. $(4, 6) = 12$

$$\frac{3(x+5)}{12} = \frac{2(2-3x)}{12} \Rightarrow 3x + 15 = 4 - 6x$$

$$3x + 6x = 4 - 15 \Rightarrow 9x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{9}$$

a) $\frac{4x-1}{3} = \frac{2-6x}{5}$

b) $\frac{9-6x}{8} = \frac{3+2x}{4}$

138 Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $\frac{2-x}{6} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{12} - \frac{x-1}{3}$

$$\frac{4-2x}{12} - \frac{12x-18}{12} = \frac{7}{12} - \frac{4x-4}{12} \Rightarrow 4-2x-12x+18 = 7-4x+4$$

$$-2x-12x+4x = 7+4-4-18 \Rightarrow -10x = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{-10} = \frac{11}{10}$$

a) $\frac{2x+4}{3} + \frac{1-x}{5} = \frac{x}{15}$

b) $\frac{1-2x}{9} + \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} = 0$

c) $\frac{3(x-2)}{10} - \frac{2x+1}{5} = \frac{7}{2}$

d) $2(3+2x) - \frac{6x+5}{4} = \frac{3x-7}{2}$

2 Problemas de ecuaciones de primer grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de primer grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

- 1.º Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.
- 2.º Plantear una ecuación.
- 3.º Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

139 La mitad de las unidades de matemáticas de un libro de texto son de aritmética y álgebra. Los $\frac{2}{3}$ del resto se dedican a geometría, y las dos últimas unidades, a estadística y probabilidad. ¿Cuántas unidades tiene el libro?

Unidades del libro: x , que es la incógnita.

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2}$

Unidades de geometría: quedan $x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ unidades $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{2} = \frac{2x}{6} = \frac{x}{3}$ unidades de geometría

Unidades de estadística y probabilidad: 2.

El total de unidades se obtiene sumando las unidades de cada tipo $\Rightarrow x = \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 2$

Resolvemos la ecuación: $\frac{6x}{6} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{12}{6} \Rightarrow 6x = 3x + 2x + 12$

$$6x - 3x - 2x = 12 \Rightarrow x = \boxed{12 \text{ unidades tiene el libro}}$$

Unidades de aritmética y álgebra: $\frac{x}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Unidades de geometría: quedan: $12 - 6 = 6$ unidades $\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$

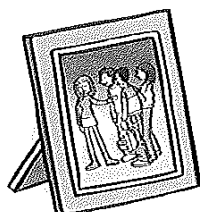
Unidades de estadística y probabilidad son las 2 que ya establecía el enunciado.

140 El precio de un pantalón es el doble que el de una camiseta. Si entre los dos cuestan 54 euros, ¿cuál es el precio de cada uno de ellos?

141 En un centro escolar, el número de alumnas de 3.º de Educación Secundaria excede en 20 al número de alumnos. Si entre todos hay 120 alumnos, ¿cuántas chicas y cuántos chicos hay en dicho curso?

142 La diferencia entre un número y los $\frac{3}{8}$ del mismo es 510. ¿De qué número se trata?

143 Se quiere enmarcar una fotografía de forma rectangular cuyo ancho es 7 centímetros menor que el largo. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del marco si el perímetro de la foto es de 66 centímetros?



144 En su cumpleaños, Julia reunió una cantidad de dinero con la que se compró algunas cosas. La mitad la gastó en ropa; los $\frac{2}{5}$, en un libro y dos CD, y aún le quedan 14 euros. ¿Cuánto dinero recibió Julia en su cumpleaños?

145 Un programa de televisión dedica las $\frac{3}{4}$ partes del tiempo a reportajes y entrevistas. La tercera parte del tiempo restante es para publicidad, y los 30 minutos que quedan, para actuaciones musicales. ¿Cuánto tiempo dedica a publicidad?

3 Ecuaciones de segundo grado

- Una ecuación de segundo grado es aquella en la que la incógnita se encuentra elevada al cuadrado.
- Su forma general es: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a , b , c son números, llamados **coeficientes**.
- Las ecuaciones de segundo grado tienen dos, una o ninguna solución real.

146 Escribe en su forma general las ecuaciones e identifica el valor de los coeficientes a , b y c .

Ejemplo $x^2 + 3x = 12 - 5x$
 $x^2 + 3x - 12 + 5x = 0$
 $x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow a = 1; b = 8; c = -12$

a) $x^2 + 5x + 14 - 2x^2 = 10$

b) $x^2 + 6x + 6 = x + 6$

147 Indica si las siguientes ecuaciones son de segundo grado o no.

Ejemplo $x^3 + x^2 = x^3 - x^2$

Pasamos los términos en x al primer miembro y operamos: $x^3 + x^2 - x^3 + x^2 \Rightarrow 0 = 2x^2 = 0$
 Por tanto, sí es una ecuación de segundo grado.

a) $2x - 3x^2 = 5$

b) $7x + x^2 = 5 + x^2$

c) $8 - 2x = x^2$

148 Comprueba que $x = -5$ y $x = 3$ son soluciones de la ecuación $x^2 + 2x - 15 = 0$.

Sustituimos los valores dados en la ecuación y comprobamos si se cumple la igualdad:

$x = -5 \Rightarrow (-5)^2 + 2 \cdot (-5) - 15 = 25 - 10 - 15 = 0 \Rightarrow$ Es solución.

$x = 3 \Rightarrow 3^2 + 2 \cdot 3 - 15 = 9 + 6 - 15 = 0 \Rightarrow$ Es solución.

149 Comprueba si son soluciones de cada una de las ecuaciones los valores dados.

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

$x = 1$

b) $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$x = -1$

c) $x^2 - 3x + 3 = 0$

$x = 2$

4 Ecuaciones incompletas de segundo grado

Una ecuación de segundo grado incompleta es aquella que o no tiene término independiente ($c = 0$), o no tiene término en x ($b = 0$), o ninguno de los dos.

150 Determina cuáles de las siguientes ecuaciones de segundo grado son incompletas.

a) $4x^2 + 2x = 0$ b) $5 + x + x^2 = 0$ c) $x^2 - 9 = 0$ d) $3x + x^2 - 5 = 0$

Es incompleta la ecuación del apartado a porque no tiene término independiente, y la del c porque no tiene término en x .

151 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas sin término en x .

Ejemplo $3x^2 - 63 = 300$

Despejamos x^2 y resolvemos la ecuación, que tendrá dos valores correspondientes a la raíz, uno positivo y otro negativo: $3x^2 = 363 \Rightarrow x^2 = \frac{363}{3} = 121 \Rightarrow x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11$

a) $x^2 - 36 = 0$

c) $4x^2 - 100 = 44$

b) $x^2 + 2x - 7 = 2x + 9$

d) $2x^2 + 5 = x^2 + 9$

152 Resuelve las siguientes ecuaciones incompletas en las que no hay término independiente.

Ejemplo $3x^2 + 21x = 0$ Sacamos factor común a la x . Para que se cumpla la igualdad $x = 0$ o el paréntesis igual a cero. Despejamos el valor de x del paréntesis para obtener la segunda solución de la ecuación.

$$x \cdot (3x + 21) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 21 = 0 \Rightarrow x = -\frac{21}{3} \Rightarrow x = -7 \end{cases}$$

a) $x^2 - 5x = 0$

c) $5x^2 = 35x$

b) $7x - x^2 = 0$

d) $3x^2 = 5x + x^2$

5 Ecuaciones completas de segundo grado

- Dada una ecuación de segundo grado en su forma general $ax^2 + bx + c = 0$, sin ninguno de sus coeficientes igual a cero, entonces se dice que es una **ecuación de segundo grado completa**.
- Sus soluciones vienen dadas por la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

153 Resuelve la ecuación de segundo grado $x^2 + 3x = 2x + 42$.

Escribimos la ecuación en su forma general: $x^2 + 3x - 2x - 42 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$

Los coeficientes son: $a = 1$; $b = 1$; $c = -42$.

Aplicamos la fórmula para determinar las dos soluciones de la ecuación.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + 13}{2} = [6] \\ x = \frac{-1 - 13}{2} = [-7] \end{cases}$$

154 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado.

a) $x^2 + 7x + 10 = 0$

b) $x^2 + 2x - 8 = 0$

c) $x^2 + 8x + 7 = 0$

d) $2x^2 - 2x - 40 = 0$

155 Resuelve las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 8 = 6x$

Expresamos la ecuación en su forma general pasando al primer miembro el término en x y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2}{2} = 4 \\ x = \frac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

a) $x^2 + 2x = 3$

b) $x^2 - 9x = -18$

c) $3x^2 + 9x = 120$

156 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones.

Ejemplo $x^2 + 10x = 4x - 5$

Operamos para expresar en forma general la ecuación y aplicamos la fórmula para determinar las soluciones: $x^2 + 10x - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-6+4}{2} = -1 \\ x = \frac{-6-4}{2} = -5 \end{cases}$$

a) $x^2 + 5x - 4 = 10$

b) $2x^2 + 2x + 8 = 20x - 20$

6 Problemas con ecuaciones de segundo grado

Algunos problemas requieren la resolución de ecuaciones de segundo grado. En ellos se han de seguir los siguientes pasos:

- 1.º Leer atentamente el enunciado y elegir la incógnita.
- 2.º Plantear una ecuación.
- 3.º Resolver la ecuación e interpretar la solución del problema.

157 Halla dos números impares, positivos, consecutivos, cuyo producto sea 195.

Un número impar lo representamos como $2x + 1$. El número impar consecutivo será dos unidades mayor que este, es decir: $2x + 3$.

Planteamos la ecuación y la resolvemos: $(2x + 1) \cdot (2x + 3) = 195$

$$4x^2 + 6x + 2x + 3 = 4x^2 + 8x + 3 = 195 \Rightarrow 4x^2 + 8x - 192 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-192)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 3072}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{3136}}{8} = \frac{-8 \pm 56}{8} \begin{cases} x = \frac{-8 + 56}{8} = 6 \\ x = \frac{-8 - 56}{8} = -8 \end{cases}$$

Como los números tienen que ser positivos, rechazamos la solución negativa y nos queda que los números buscados son:

$$2x + 1 = 2 \cdot 6 + 1 = \boxed{13}$$

$$2x + 3 = 2 \cdot 6 + 3 = \boxed{15}$$

158 Halla dos números consecutivos cuyo producto sea 306.

159 Calcula dos números consecutivos sabiendo que sus cuadrados suman 145.

160 Obtén dos números pares consecutivos cuya suma de cuadrados es 340.

161 Calcula dos números impares consecutivos sabiendo que el cuadrado de su suma es 256.

162 La suma de los cuadrados de tres números impares consecutivos es 371. Averigua de qué números se trata.

163 Calcula un número tal que el doble de su cuadrado menos la mitad de su cuadrado es 1014.

164 Si a un número se le suma la mitad de su cuadrado, se obtiene 24. ¿De qué número se trata?

165 Calcula el lado de un cuadrado cuya área mide 121 centímetros cuadrados.

5. Ecuaciones de primer y segundo grado

166 Calcula el radio de un círculo que tiene de área 36π centímetros cuadrados.

167 Un terreno rectangular ocupa 128 metros cuadrados. Calcula sus dimensiones sabiendo que un lado es el doble que el otro.

168 Calcula la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su altura es 2 centímetros menor que su base y que su área es de 168 centímetros cuadrados.

169 El área de una parcela rectangular es de 37 500 metros cuadrados. Si la base de la parcela mide 100 metros más que la altura, ¿cuáles son sus dimensiones?

170 Calcula cuánto miden los lados de un cuadrado cuya diagonal mide 100 centímetros.

