

4. Polinomios

1 Expresiones algebraicas. Valor numérico

- Una **expresión algebraica** es una combinación de números y letras relacionados mediante operaciones de suma, resta, multiplicación, división y potencias. Las letras de una expresión algebraica se llaman **variables**.
- El **valor numérico** de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.

100 Escribe la expresión algebraica que indica la diferencia entre la edad de dos personas. Calcula después el valor numérico de esa diferencia cuando las edades son 45 y 29 años.

Si a es la edad de una persona, y b , la edad de la otra, la diferencia entre sus edades viene dada por la expresión $|a - b|$.

Si a es 45, y b , 29, entonces, el valor numérico de $a - b$ es: $45 - 29 = 16$.

101 Escribe la expresión algebraica que exprese el significado de las frases siguientes.

Ejemplo "Si Jaime tiene x euros, insuficientes para comprar un CD de 25 euros, indica cuánto dinero le falta." Le faltan $25 - x$ euros.

a) El precio de 7 bolígrafos si cada uno cuesta c euros.

b) El triple de una cantidad, y , reducida en 6 unidades.

c) El cuadrado de un número, b , más su mitad.

102 Escribe posibles frases que estén representadas por las siguientes expresiones algebraicas.

Ejemplo $x^2 - 2x$ El cuadrado de un número, menos su doble.

a) $a^3 + a^2 + a$

b) $b^2 - 3b - 4$

c) $x \cdot y + x^2 + y^2$

d) $x \cdot y \cdot z - 2x - 2y - 2z$

- 103** Halla el valor numérico de las expresiones algebraicas para los valores de las variables indicados en cada caso.

Ejemplo $3a - a^2b + 5ab^2 - 2a^3 + b^3 + 1$ para $a = -1$ y $b = 2$

$$3(-1) - (-1)^2 \cdot 2 + 5(-1) \cdot 2^2 - 2(-1)^3 + 2^3 + 1 = -3 - 2 - 20 + 2 + 8 + 1 = -14$$

a) $5a + 3b - ab$ si $a = -3$ y $b = -4$

b) $\frac{3y^2z}{2a}$ si $a = 3$, $y = 2$ y $z = -5$

c) $2 - y^2 + 5x^2$ si $y = 3$ y $x = -2$

- 104** Calcula el valor numérico del polinomio $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ para los valores $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Cómo son los resultados obtenidos?

- 105** Laura tiene una colección de n sellos, y Javier, otra con la mitad de sellos que Laura. ¿Qué expresión permite calcular la cantidad de sellos que tienen entre los dos? ¿Cuántos sellos tienen si $n = 250$?

- 106** La expresión $2a + 3b + c$ tiene el valor numérico de 6 cuando $a = 1$ y $b = 1$. ¿Cuánto vale c en este caso?

- 107** Un acertijo dice lo siguiente: "Piensa un número, multiplícalo por tres, suma al resultado 5, resta el doble del número inicial al resultado, resta 4 a ese resultado y resta de nuevo el número inicial al resultado". ¿Por qué el resultado final es siempre 1?

2 Monomios. Suma y resta

- Un monomio es una expresión del tipo $a \cdot x^n$.
- Monomios semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal.
- La suma o resta de dos monomios semejantes es otro monomio semejante a ellos cuyo coeficiente es la suma o resta de los coeficientes que se operan. Solo se pueden sumar y restar los monomios semejantes.

Coeficiente
 \uparrow
 $a \cdot x^n$
 Parte literal Grado

108 Realiza las siguientes operaciones de monomios.

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3$

b) $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4$

a) $b^3 - 12b^3 + 8b^3 + 5b^3 = (1 - 12 + 8 + 5)b^3 = \boxed{2b^3}$

b) $2a^4 - 3a^4 + \frac{1}{2}a^4 = \left(2 - 3 + \frac{1}{2}\right)a^4 = \left(\frac{4}{2} - \frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)a^4 = \boxed{-\frac{1}{2}a^4}$

109 Realiza la operación indicada en los casos que sea posible.

Ejemplo $3y^2 + 4y^3$: no se puede porque los monomios no tienen la misma parte literal.

a) $6z - \frac{3}{4}z =$

b) $\frac{1}{2}y^3 + 4x^3 =$

c) $6a^2 - 2a =$

d) $9b^6 + 5b^6 =$

110 Calcula el monomio que se obtiene en las siguientes sumas y restas.

Ejemplo $7c^5 - \frac{3}{4}c^5 + c^5 = \left(7 - \frac{3}{4} + 1\right)c^5 = \left(\frac{28 - 3 + 4}{4}\right)c^5 = \frac{29}{4}c^5$

a) $2a^8 - 9a^8 - 4a^8 =$

b) $\frac{2}{3}z^2 + 4z^2 =$

c) $x - \frac{3}{8}x =$

3 Multiplicación y división de monomios

● La multiplicación o división de monomios se realiza multiplicando o dividiendo por separado los coeficientes y la parte literal. No es necesario que los monomios que se multiplican o dividen sean semejantes.

● Conviene recordar las dos propiedades de las potencias que aparecen en estas operaciones:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

111 Halla el resultado de las siguientes operaciones.

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4$

b) $\frac{-20c^3}{4c}$

a) $\frac{1}{6}y^3 \cdot (-2y^2) \cdot 3y^4 = \frac{-2 \cdot 3}{6}y^{3+2+4} = -1y^9 = \boxed{-y^9}$

b) $\frac{-20c^3}{4c} = \frac{-20}{4}c^{3-1} = \boxed{-5c^2}$

112 Une mediante flechas los productos de monomios que dan el mismo resultado.

Ejemplo $x^2 - 2x$ El cuadrado de un número menos su doble.

a) $\left(\frac{1}{2}a^2\right) \cdot 6a^3$	I. $(-a^7) \cdot (-6a^2)$
b) $(-3a^4) \cdot (-2a^2)$	II. $\left(\frac{4}{3}a^4\right) \cdot \left(\frac{9}{2}a^3\right)$
c) $\left(\frac{3}{4}a^3\right) \cdot (8a^6)$	III. $(6a) \cdot a^5$
d) $(2a^5) \cdot (3a^2)$	IV. $(3a^4) \cdot a$

113 Realiza las siguientes divisiones de monomios.

Ejemplo $\frac{b^4}{7b^3} = \frac{1}{7}b^{4-3} = \frac{1}{7}b$

a) $\frac{40z^6}{8z^4} =$

c) $\frac{-36b^8}{3b} =$

b) $\frac{18y^9}{-6y^4} =$

d) $\frac{-2c^3}{-5c^2} =$

4 Polinomios: grado y orden

- Un polinomio es la expresión algebraica formada por varios monomios no semejantes:

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

Cada uno de los monomios se llama **término**.

- Los números $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son los **coeficientes**, y x , la variable. El término que no tiene variable es el **término independiente**.
- Cuando los términos de un polinomio se escriben en orden decreciente de sus grados se dice que el polinomio está **ordenado**. El **grado** de un polinomio es el mayor exponente al que está elevada la variable.

114 Identifica el término independiente y el grado del siguiente polinomio y di si está ordenado.

$$5x^3 - 3 - 2x^4 + 9x + x$$

El término independiente es -3 , y el grado, 4.

El polinomio no está ordenado, porque los exponentes de los términos en x no están ordenados de forma decreciente.

115 Completa la tabla siguiente.

Polinomio	Grado	Coeficiente del término de mayor grado	Término independiente	Ordenado
$3x^2 + x - x^5 + 9$	5	-1	9	NO
$6x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x + 2$				
$7 + 4x - 3x^2 - x^3$				
$\frac{4}{3}x^6 - 2x^4 + \frac{2}{9}x^2$				

116 Escribe dos polinomios que cumplan las siguientes características.

Ejemplo Un polinomio de grado 5 que tenga el coeficiente del término de mayor grado igual a -2 :

$$-2x^5 + 4x^3 - 9x + 6 + x^2$$

a) Un polinomio ordenado de grado 3 con el término independiente igual a 1.

b) Un polinomio de cuatro términos ordenado sin término independiente y de grado 5.

5 Suma y resta de polinomios

La suma o resta de polinomios es otro polinomio que se obtiene sumando o restando los términos semejantes, es decir, los que tienen la misma parte literal.

- 117** Dados los polinomios $A(x) = 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2}$ y $B(x) = 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3$, calcula las expresiones $A(x) + B(x)$ y $B(x) - A(x)$.

Primero expresamos los polinomios de forma ordenada, y luego procedemos a operar teniendo en cuenta los criterios establecidos.

$$\begin{aligned} a) A(x) + B(x) &= 3x^2 - \frac{1}{4}x + x^3 - \frac{5}{2} + 1 - x^4 + \frac{3}{8}x - 2x^3 = -x^4 + (1 - 2) \cdot x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) \cdot x + \\ &+ \left(1 - \frac{5}{2}\right) = -x^4 - x^3 + 3x^2 + \left(\frac{3}{8} - \frac{2}{8}\right) \cdot x + \left(\frac{2}{2} - \frac{5}{2}\right) = \left[-x^4 - x^3 + 3x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{3}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B(x) - A(x) &= -x^4 - 2x^3 + \frac{3}{8}x + 1 - \left(x^3 + 3x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\right) = -x^4 + (-2 - 1)x^3 - 3x^2 + \\ &+ \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right)x + \left(1 + \frac{5}{2}\right) = \left[-x^4 - 3x^3 - 3x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{2}\right] \end{aligned}$$

- 118** Calcula la suma de los polinomios $A(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 6 - x$ y $B(x) = 4x^3 + 7x - 2x^2 + x^4 - 9$.

- 119** Halla $P(x) - Q(x)$, siendo $P(x) = 4x + 7x^2 - x^3 - 3$ y $Q(x) = 2 + 5x - 2x^3 - x^4$.

- 120** Realiza la siguiente operación.

Ejemplo $(2x^3 - 5x^2 - 3x) - \left(4x^3 - \frac{1}{2}x + 7\right) = 2x^3 - 5x^2 - 3x - 4x^3 + \frac{1}{2}x - 7 =$

$$= (2 - 4)x^3 - 5x^2 + \left(-3 + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 + \left(-\frac{6}{2} + \frac{1}{2}\right)x - 7 = -2x^3 - 5x^2 - \frac{5}{2}x - 7$$

a) $(6x - 4x^3 + 2) + \left(3x - \frac{1}{2} + 2x^2 + 5x^3\right) =$

6 Multiplicación de polinomios

El producto de dos polinomios es otro polinomio que se obtiene multiplicando cada término de uno de ellos por todos los términos del otro.

121 Calcula el producto de los polinomios $P(x) = 3x - x^2$ y $Q(x) = 2x^4 - 6x + 5x^2 + 2$

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (3x - x^2) \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) = 3x \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) - x^2 \cdot (2x^4 - 6x + 5x^2 + 2) = \\ &= 6x^5 - 18x^2 + 15x^3 + 6x - 2x^6 + 6x^3 - 5x^4 - 2x^2 = \boxed{-2x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 21x^3 - 20x^2 + 6x} \end{aligned}$$

122 Dado el polinomio $A(x) = 3x - 2 + x^3 - 7x^4$, realiza los siguientes cálculos.

Ejemplo $(-8x^3) \cdot A(x) = -8x^3 \cdot (3x - 2 + x^3 - 7x^4) = -24x^4 + 16x^3 - 8x^6 + 56x^7$

a) $(-6) \cdot A(x) =$

b) $2x^2 \cdot A(x) =$

c) $(-5x^4) \cdot A(x) =$

123 Calcula el producto de los polinomios $P(x) = 6x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ y $Q(x) = 2x - 5$. ¿Qué grado tiene el polinomio resultante?

124 Halla los siguientes productos.

Ejemplo $(3x^2 - 4) \cdot (9x^3 + 5x - 6) = 3x^2 \cdot (9x^3 + 5x - 6) - 4 \cdot (9x^3 + 5x - 6) =$
 $= 27x^5 + 15x^3 - 18x^2 - 36x^3 - 20x + 24 = 27x^5 - 21x^3 - 18x^2 - 20x + 24$

a) $(2x + x^2 - 5x^3) \cdot (6 - x) =$

b) $(7x^4 - 6x^2 + 3) \cdot (2x + x^3) =$