

3. Sucesiones

1 Sucesiones numéricas

- Una **sucesión** es un conjunto infinito de números ordenados que siguen alguna regla.
- Cada uno de estos números se llama **término** y se representa por a_n , donde n es el lugar que ocupa dicho número en la sucesión.
- La fórmula que permite hallar cualquier término de una sucesión se denomina **término general**.

73 Escribe los tres términos siguientes de las sucesiones.

Ejemplo $-1, 3, -5, 7, -9...$ Los tres términos siguientes son: $11, -13, 15$.

a) $2, 6, 18, 54, 162...$

b) $-7, -3, 1, 5, 9...$

74 Escribe los 6 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 2 y todos los demás se obtienen sumando -5 al término anterior.

75 ¿Cuáles son los 8 primeros términos de la sucesión cuyo primer término es -1 y los demás se obtienen multiplicando el anterior por 4?

76 Escribe el término que falta en las siguientes sucesiones.

Ejemplo $\frac{1}{3}, \frac{-2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{-8}{15}, \text{---}, \frac{-32}{23}, \frac{64}{27}, \dots$ En el numerador, cada término se obtiene multiplicando el anterior por -2 , y en el denominador, sumando 4 al anterior. El término que falta es $\frac{16}{19}$.

a) $7, 12, 17, \dots, 27, 32...$

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \dots$

c) $1, 4, 9, 16, 25, \dots, 49, 64...$

77 El término general de una sucesión es $a_n = 4n^2 + 5n - 2$. Calcula los términos primero, tercero y décimo.

Como n indica el lugar que ocupa cada término en la sucesión, para hallar el primero sustituimos n por 1; para el tercero, por 3, y para el décimo, por 10.

– Primer término: $a_1 = 4 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 2 = 4 + 5 - 2 = \boxed{7}$

– Tercer término: $a_3 = 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 2 = 36 + 15 - 2 = \boxed{49}$

– Décimo término: $a_{10} = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 2 = 400 + 50 - 2 = \boxed{448}$

78 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones dadas por su término general.

Ejemplo $a_n = n^2 - 2n$. Dando a n los valores desde 1 hasta 4 se obtiene:

$$a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1 \quad a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0 \quad a_3 = 3^2 - 2 \cdot 3 = 3 \quad a_4 = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$$

a) $a_n = 5n - 3$

b) $a_n = \frac{1}{4n}$

c) $a_n = (-2)^n$

79 Calcula el término que ocupa el lugar 40 en cada una de las siguientes sucesiones.

Ejemplo $a_n = (10 + n)^2 \Rightarrow a_{40} = (10 + 40)^2 = 50^2 = 2500$

a) $a_n = 6n - 20$

c) $a_n = \frac{1}{2n - 1}$

b) $a_n = (-1)^n$

d) $a_n = (2n - 100)^2$

80 Dada la sucesión $\frac{1}{4}, \frac{2}{8}, \frac{3}{16}, \frac{4}{32}, \frac{5}{64}, \dots$, elige su término general de entre los siguientes.

a) $a_n = \frac{n + 1}{2n}$

b) $a_n = \frac{n + 1}{2^n}$

c) $a_n = \frac{n}{2^n}$

d) $a_n = \frac{n}{2^{n+1}}$

2 Progresiones aritméticas

• Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término se obtiene sumando al término anterior una cantidad fija, llamada **diferencia** (d).

• El **término general** de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \quad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la sucesión.}$$

• La **suma de los n primeros términos** de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

81 Indica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas. En caso afirmativo, escribe su diferencia.

Ejemplo $-7, -11, -15, -19, -23, \dots$ *Sí, es una progresión aritmética porque se mantiene una diferencia constante entre sus términos: $d = -4$.*

a) $5, 10, 20, 40, 80, \dots$

b) $35, 25, 15, 5, -5, \dots$

82 Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

Ejemplo $20, 13, 6, -1, -8$ $a_1 = 20, d = 20 - 13 = -7 \Rightarrow a_n = 20 + (n - 1) \cdot (-7) = 27 - 7n$

a) $2, 5, 8, 11, 14, \dots$

b) $48, 42, 36, 30, 24, \dots$

c) $-9, -7, -5, -3, -1, \dots$

83 Halla el término general y los 4 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas a partir de los datos dados.

Ejemplo $a_1 = 2; d = 3$. *Sustituimos los datos en la fórmula general:*

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 1 \Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 5; a_3 = 8; a_4 = 11$$

a) $a_1 = -11; d = 5$

b) $a_1 = 16; d = -4$

84 Escribe el valor del término indicado de las siguientes sucesiones aritméticas.

Ejemplo $a_1 = 5$, $d = 1$, a_{25} Sustituimos los términos en la fórmula general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$
 $a_{25} = 5 + (25 - 1) \cdot 1 = 29$

a) $a_1 = 7$, $d = -3$, a_{40}

b) $a_1 = -8$, $d = 10$, a_{75}

c) $a_1 = -11$, $d = -2$, a_{30}

85 Escribe el término general de una progresión aritmética tal que $a_4 = 9$ y $a_5 = 15$.

86 Halla la suma de los 50 primeros términos de la progresión aritmética donde $a_1 = 4$ y $d = 5$.

El término general de la progresión aritmética es: $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 5$.

Sustituimos en la fórmula general:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \Rightarrow S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{4 + [4 + 49 \cdot 5]}{2} \cdot 50 = \boxed{6\,325}$$

87 Calcula la suma de los 25 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $a_1 = 5$, $d = 2$

b) $a_1 = 10$, $d = -3$

88 Halla la suma de los 50 primeros números pares.

3 Progresiones geométricas

- Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, llamada **razón** (r). La razón de una progresión geométrica es el cociente entre dos términos consecutivos.

- El **término general** de una progresión geométrica es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} \quad \text{donde } a_1 \text{ es el primer término de la progresión.}$$

- La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica viene dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

- 89** Indica si las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y, en caso afirmativo, indica su razón.

Ejemplo 1, -2, 4, -8, 16... Sí, es una progresión geométrica porque se cumple que:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = \frac{16}{-8} = \dots = r = -2$$

a) 4, 12, 36, 72...

b) 2, -2, 2, -2, 2...

c) 3, 6, 9, 12, 15...

- 90** Calcula la razón r y escribe los tres términos siguientes de las progresiones geométricas.

Ejemplo 1, 3, 9, 27, 81... $\frac{3}{1} = \frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = r = 3$. El siguiente término será el resultado de multiplicar 81 por 3, y así sucesivamente. Los términos siguientes son: 243, 729 y 2187.

a) 5, -5, 5, -5, 5...

b) 4, -8, 16, -32, 64...

c) 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{27}$, $\frac{16}{81}$, ...

91 Halla el término general y los cuatro primeros términos de las progresiones geométricas a partir de a_1 y r .

Ejemplo $a_1 = 2, r = 3$: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)} = 2 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 18, a_4 = 54$

a) $a_1 = 6, r = 2$

b) $a_1 = -1, r = 5$

c) $a_1 = 7, r = -2$

92 Halla el término general y la suma de los 10 primeros términos de la progresión donde $a_1 = -8$ y $r = -2$.

El término general de la progresión es: $a_n = -8 \cdot (-2)^{n-1}$

La suma de los 10 primeros términos vendrá dada por la expresión general: $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

Y sustituyendo los datos:

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot (-2) - a_1}{-2 - 1} = \frac{(-8 \cdot (-2)^{10-1}) \cdot (-2) - (-8)}{-3} = \frac{(-8) \cdot (-2)^9 \cdot (-2) - (-8)}{-3} =$$

$$= \frac{(-8) \cdot (-2)^9 - (-8)}{-3} = \boxed{-1\,368}$$

93 Calcula la suma de los 5 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3, r = 4$

b) $a_1 = 2, r = -3$

94 Si el cuarto término de una progresión geométrica es 405 y su razón 3, calcula su primer término y el término general.

4 Sucesiones recurrentes

- Una **sucesión recurrente** es aquella en la que cada término se obtiene a partir de los anteriores.
- Las progresiones aritméticas y geométricas son sucesiones recurrentes.

95 De una sucesión se conocen $a_1 = 3$, $a_2 = -1$ y $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$. ¿Es una sucesión recurrente? Calcula los 5 primeros términos.

Observando la expresión del término general se deduce que cada término se obtiene a partir de los dos anteriores. Por tanto, es una sucesión recurrente.

Los dos primeros términos se conocen, y los otros tres se calculan a partir del término general:

$$a_3 = 2 \cdot a_2 + a_1 = 2 \cdot (-1) + 3 = \boxed{1}$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 + a_2 = 2 \cdot 1 + (-1) = \boxed{1}$$

$$a_5 = 2 \cdot a_4 + a_3 = 2 \cdot 1 + 1 = \boxed{3}$$

96 En una sucesión, el primer término es 8, y los demás se calculan sumando 6 al término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es? ¿Cuáles son sus 5 primeros términos?

97 Escribe los 5 primeros términos de una sucesión en la que el primer término es 2 y los demás se obtienen multiplicando por -5 el término anterior. ¿Qué tipo de sucesión es?

98 Halla los 10 primeros términos de la sucesión de Fibonacci: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

99 Calcula los 5 primeros términos de una sucesión en la que $a_1 = 2$, $a_2 = -3$ y $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$.

**COMPRUEBA LO QUE
HAS APRENDIDO****3. Sucesiones**

- 1 Escribe los tres primeros términos de la sucesión $a_n = 2n^2 - 3n + 1$.
- 2 Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, y escribe su término general.
 - a) 5, 10, 15, 20...
 - b) 5, 10, 20, 40...
- 3 Determina el término general que define los números naturales (1, 2, 3, 4...) y calcula la suma de los 100 primeros. ¿Es una sucesión aritmética?
- 4 Si el octavo término de una progresión aritmética es 15 y su diferencia es 3, calcula el primer término de la sucesión y el término general.
- 5 Escribe el término general de una progresión geométrica tal que $a_1 = 2$ y $a_2 = 6$. Determina los 5 primeros términos de esta progresión.