Actividades de Matemáticas de Pendientes:

3º de ESO

Trimestre 1

13. Estadística unidimensional

1 Tablas de frecuencias

- **Frecuencia absoluta** (f_i) es el número de veces que aparece un determinado dato en un estudio estadístico.
- **Frecuencia relativa** (h_i) de un dato es el cociente entre su frecuencia absoluta y el número total de datos.
- **Frecuencia absoluta acumulada** (F_i) es la suma de las frecuencias absolutas de todos los datos inferiores o iguales al dato considerado.

341 ***En una clase se les preguntó a los alumnos por el número de libros que leyeron en las vacaciones pasadas. Los datos fueron los siguientes.***

1 2 1 2 3 0 1 2 1 3 2 4 1 2 3 1 0 2 2 3 1 2 2 3 2

Construye una tabla de frecuencias con estos datos. ¿Cuántos alumnos leyeron más de dos libros?

Contamos el número de alumnos que no han leído ningún libro, los que han leído uno, dos, tres...

Este recuento nos dará la frecuencia absoluta.

A partir de cada frecuencia absoluta, sumando el valor anterior obtenemos la frecuencia absoluta acumulada.

La frecuencia relativa de cada dato es el resultado de dividir su frecuencia absoluta entre los 25 alumnos que se han considerado en el estudio.

Los alumnos que leyeron más de dos libros son los que leyeron 3 y los que leyeron 4, es decir: $5 + 1 = \boxed{6}$.

N.º de libros	f_i	F_i	h_i
0	2	2	$\frac{2}{25} = 0{,}08$
1	7	$2 + 7 = 9$	$\frac{7}{25} = 0{,}28$
2	10	$9 + 10 = 19$	$\frac{10}{25} = 0{,}40$
3	5	$19 + 5 = 24$	$\frac{5}{25} = 0{,}20$
4	1	$24 + 1 = 25$	$\frac{1}{25} = 0{,}04$

342 El número de ordenadores que tienen en su casa un grupo de amigos es el siguiente.

1 2 2 1 3 2 1 1 1 2 3 1 1 2 4 1 1 2 1 2

a) Completa la siguiente tabla con las frecuencias.

N.º de ordenadores	f_i	F_i	h_i
1			
2			
3			
4			

b) ¿Cuántos amigos tienen un solo ordenador?

c) ¿Cuántos tienen menos de tres ordenadores?

343 *Las alturas, en centímetros, de los 30 jugadores de un club deportivo son las siguientes.*

153	*152*	*153*	*160*	*163*	*172*	*168*	*168*	*163*	*152*	*155*	*157*	*169*	*170*	*169*
166	*167*	*168*	*157*	*153*	*158*	*153*	*154*	*155*	*162*	*158*	*159*	*153*	*165*	*166*

a) Completa la tabla de frecuencias con estos datos.
b) ¿Cuántos deportistas miden más de 165 centímetros?

Puesto que los valores de estas alturas son muy diferentes entre sí, las agruparemos en cinco clases o intervalos de la misma amplitud, según se muestra en la tabla, y contaremos el número de jugadores que pertenecen a cada clase.

Para completar la tabla operamos según lo que se había explicado anteriormente.

Altura (cm)	x_i	f_i	F_i	h_i
$150 \leq x < 155$	*152,5*	*8*	*8*	*0,27*
$155 \leq x < 160$	*157,2*	*7*	*15*	*0,23...*
$160 \leq x < 165$	*162,5*	*4*	*19*	*0,13...*
$165 \leq x < 170$	*167,2*	*9*	*28*	*0,3*
$170 \leq x < 175$	*172,5*	*2*	*30*	*0,06*

Miden más de 165 centímetros todos los jugadores de las dos últimas clases, es decir: 9 + 2 = $\boxed{11}$

344 La siguiente tabla muestra los tiempos, en horas, que 30 corredores tardaron en recorrer una maratón.

4,3	4,2	5	4,2	4,3	2,8	3	3,1	3,5	4,5	4,8	3	5	4,8	3,8
4,1	2,9	4,3	4,5	4,8	3,9	3,3	3,6	3,7	4,2	4,7	4,8	3,9	4,3	4,2

a) Completa la tabla de frecuencias, en la que los datos aparecen agrupados en clases, y determina las frecuencias absoluta, acumulada y relativa.

Altura (cm)	x_i	f_i	F_i	h_i
$2,5 \leq x < 3$	2,75			
$3 \leq x < 3,5$	3,25			
$3,5 \leq x < 4$	3,75			
$4 \leq x < 4,5$	4,25			
$4,5 \leq x < 5$	4,75			

b) ¿Cuántos corredores tardaron menos de 4 horas en terminar la maratón?

c) ¿Cuántos corredores tardaron entre 3 y 4 horas en terminar la maratón?

2 Gráficos estadísticos

Hay gran cantidad de gráficos estadísticos. Los más importantes son:

- **Diagrama de barras:** se dibuja una barra vertical sobre cada dato de altura proporcional a su frecuencia. Se utiliza para datos simples. El resultado de unir los extremos de las barras da lugar al polígono de frecuencias.
- **Diagrama de sectores:** a cada dato se le asigna un sector del círculo de amplitud proporcional a la frecuencia de ese dato.
- **Histograma:** se dibujan rectángulos adosados cuya base corresponde a la amplitud de la clase o intervalo, y cuya altura es proporcional a la frecuencia. Se utiliza con datos agrupados.

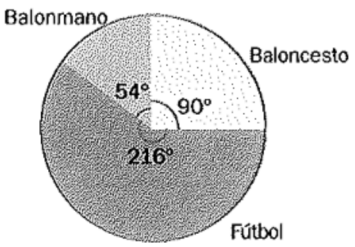
345 ***La siguiente tabla muestra el deporte que practican 200 jóvenes de un centro escolar. Representa los datos en un diagrama de sectores y construye el polígono de frecuencias.***

Actividad	*Fútbol*	*Balonmano*	*Baloncesto*
f_i	*120*	*30*	*50*

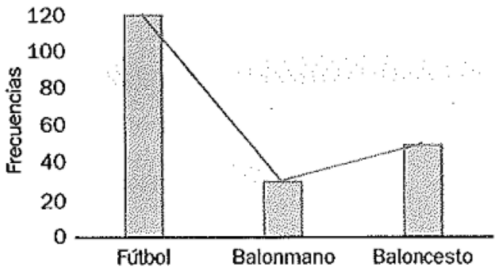
Repartimos los 360°del círculo entre la suma de las frecuencias: 360° : 200 = 1,8°

Asignamos a cada actividad los grados que le corresponden multiplicándolo por su frecuencia correspondiente.

Fútbol: 120 · 1,8° = 216°
Balonmano: 30 · 1,8° = 54°
Baloncesto: 50 · 1,8° = 90°



Para dibujar el polígono de frecuencias, dibujamos primero el diagrama de barras. Para cada actividad dibujamos una barra proporcional a la frecuencia y unimos sus extremos.



346 La siguiente tabla muestra el estudio realizado a 60 personas sobre el número de tazas de café que beben en un día. Dibuja el diagrama de barras y contesta a las siguientes preguntas.

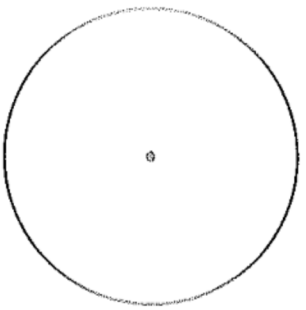
N.° de tazas	f_i
Ninguna	26
Una o dos	16
Tres o cuatro	14
Más de cuatro	4

a) ¿Cuántos beben café?

b) ¿Qué porcentaje de entrevistados no bebe café?

347 En una encuesta a 25 personas sobre el número de coches que hay en su casa se obtienen los siguientes datos. Dibuja el diagrama de sectores correspondiente.

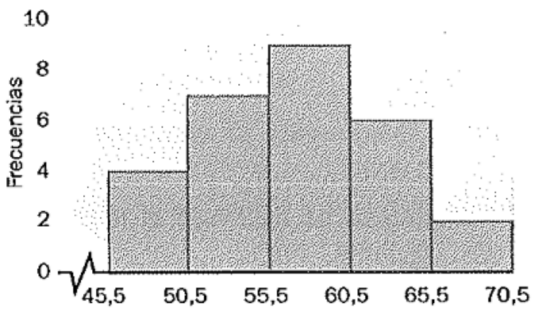
N.º de coches	f_i
0	2
1	8
2	11
3	4



348 ***En un estudio sobre el crecimiento de los árboles de una zona se han medido los perímetros de 30 árboles, obteniéndose los siguientes resultados. Dibuja el histograma correspondiente.***

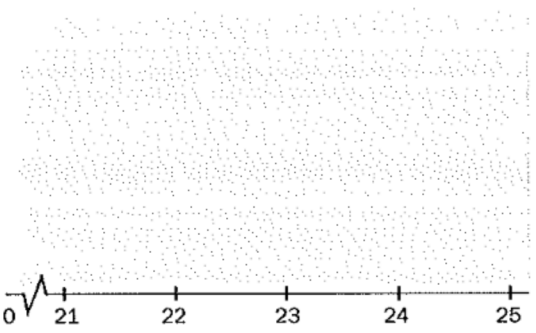
Perímetro (cm)	x_i	f_i
$45{,}5 \leq x < 50{,}5$	48	4
$50{,}5 \leq x < 55{,}5$	53	7
$55{,}5 \leq x < 60{,}5$	58	9
$60{,}5 \leq x < 65{,}5$	63	6
$65{,}5 \leq x < 70{,}5$	68	2

Para dibujar el histograma correspondiente dibujamos los rectángulos adosados para cada una de las clases, cuyo ancho corresponde con su amplitud, y de altura igual a la frecuencia absoluta de la clase correspondiente.



349 Las manzanas recolectadas en un huerto se han clasificado en función de su perímetro. Para ello se han tomando 40 de ellas y se han definido las clases. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Construye el histograma correspondiente.

Perímetro (cm)	x_i	f_i
$21 \leq x < 22$	21,5	7
$22 \leq x < 23$	22,5	12
$23 \leq x < 24$	23,5	15
$24 \leq x < 25$	24,5	6



3 Parámetros de centralización

Los **parámetros de centralización** son unas medidas que intentan resumir todos los datos en un número que los represente.

- La **moda** (*Mo*) es el dato (o datos) que tiene mayor frecuencia absoluta.
- La **media aritmética** ($\bar{x}$) es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos.
- La **mediana** (*Me*) es el dato que ocupa el lugar central de todos los datos al ordenarlos de menor a mayor. Si hay un número par de datos, es la media de los dos datos centrales.

350 ***El número de hermanos de un grupo de amigos es el siguiente.***

1 1 2 0 2 3 1 1 0 2 1 0 2 1 2 1

Calcula los parámetros de centralización que representan a los datos.

La moda es $\boxed{1}$*, ya que es el número que más se repite, 7 veces.*

Para determinar la mediana, los ordenamos de menor a mayor y cogemos los valores que están en medio para hallar su media.

0 0 0 1 1 1 1 $\underline{1\ 1}$ *1 2 2 2 2 2 3*

Luego la mediana es $\frac{1+1}{2} = \boxed{1}$

Para calcular la media utilizamos su fórmula (hay 16 datos):

$$\bar{x} = \frac{0+0+0+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+3}{16} = \frac{20}{16} = \boxed{1{,}25}$$

351 Federico se ha fijado en el número de mensajes SMS que recibe durante una semana y ha obtenido los siguientes datos.

18 16 14 15 16 16 17

Calcula los parámetros de centralización correspondientes.

352 Las notas conseguidas por Pilar al final del curso han sido las siguientes.

7 9 6 5 8 7 9 8

¿Cuál fue la nota media que obtuvo al final del curso? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?

4 Parámetros de dispersión

Los **parámetros de dispersión** indican lo agrupados o dispersos que están los datos.

- El **rango** o **recorrido** es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos.
- La **desviación con respecto a la media** es la diferencia entre cada dato y la media aritmética.
- La **varianza** (σ^2) es la media aritmética del cuadrado de las desviaciones con respecto a la media de cada dato.
- La raíz cuadrada positiva de la varianza se denomina **desviación típica** (σ).

353 ***Los tiempos que duran las baterías de los móviles de un grupo de amigas son los siguientes.***

72 68 80 120 83 89 110 92

Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.

Rango: $120 - 68 = \boxed{52}$

Para calcular la varianza calcularemos la media:

$$\bar{x} = \frac{72 + 68 + 80 + 120 + 83 + 89 + 110 + 92}{8} = \frac{714}{8} = \boxed{89{,}25}$$

Para calcular la varianza, primero restamos a cada dato el valor de la media y lo elevamos al cuadrado, y después calculamos la media de los resultados obtenidos.

$$\sigma^2 = \frac{(72-89{,}25)^2+(68-89{,}25)^2+(80-89{,}25)^2+(120-89{,}25)^2+(83-89{,}25)^2+(89-89{,}25)^2+(110-89{,}25)^2+(92-89{,}25)^2}{8} = \boxed{282{,}1875}$$

La desviación típica será: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \boxed{16{,}798}$

354 Las edades de cuatro hermanos son 17, 15, 9 y 3 años. Calcula los siguientes parámetros.

a) El rango.

b) La varianza.

355 En un examen de recuperación de Matemáticas se han conseguido las siguientes notas: 8, 5, 3, 2 y 2. Calcula su desviación típica.

5 Cálculo de parámetros. Interpretación

- Cuando hay muchos datos, los parámetros de centralización se obtienen a partir de los datos de las tablas de frecuencias, según las siguientes expresiones.

Media aritmética: $\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N}$ **Varianza:** $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{N} = \dfrac{\Sigma x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2$

- Para calcular la **mediana**: se divide el número total de datos (N) entre 2. Se busca en la tabla la primera frecuencia acumulada (F_i) mayor que dicho cociente. El valor correspondiente a dicha frecuencia acumulada es la mediana.
- Cuando se quiere calcular parámetros de datos estadísticos agrupados en clases, se utiliza la **marca de clase**, que es el valor medio de cada clase.

356 *El número de televisores que tienen en su casa un grupo de alumnos es:*

N.º de televisores	*1*	*2*	*3*	*4*
Frec. absolutas	*2*	*9*	*12*	*7*

Calcula la moda, la mediana y la varianza.

Primero construimos la tabla necesaria para calcular la media y la varianza:

N.º de televisores (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	*2*	*2*	*2*	*2*
2	*9*	*11*	*18*	*36*
3	*12*	*23*	*36*	*108*
4	*7*	*30*	*28*	*112*
Total	*30*		*84*	*258*

La moda es el valor más frecuente, que en este caso es 3 (que tiene una frecuencia absoluta de 12).

Mediana: $\dfrac{N}{2} = \dfrac{30}{2} = 15 \Rightarrow F_i > 15$ *es 23* $\Rightarrow \boxed{Me = 3}$ *(el valor cuya* F_i *es 23)*

Varianza: calculamos primero la media aritmética, y a partir de ahí, la varianza.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N} = \frac{84}{30} = \boxed{2{,}8} \text{ y } \sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{258}{30} - 2{,}8^2 = 8{,}6 - 7{,}84 = \boxed{0{,}76}$$

357 El número de horas que han dedicado a preparar un examen de Lengua castellana y Literatura un grupo de alumnos es el siguiente.

5 3 4 5 4 2 3 2 5 6 4 5 6 3 5 4 5 2 6 3 5 3 4 2 5

Calcula su media aritmética y su varianza.

N.º de horas (x_i)	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
Total			

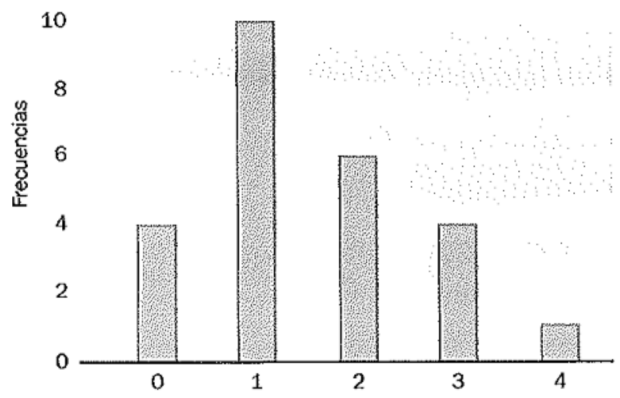
358 El número de veces que se lavan los dientes diariamente un grupo de personas viene dado por la siguiente tabla. Complétala y calcula la moda, la mediana y la media aritmética.

N.º de veces	1	2	3	4
f_i	24	65	41	20

N.º de veces (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
Total				

359 En el diagrama de barras se muestra un estudio sobre las veces que van al cine un grupo de personas.

Calcula su media aritmética y su varianza.



N.º de veces (x_i)	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
Total			

360 *Se ha realizado un estudio sobre el tiempo que un medicamento tarda en hacer efecto. Los resultados se han clasificado en clases según se muestra en la tabla.*
Con estos datos, calcula la moda, la mediana, la media aritmética y la varianza.

Tiempo de reacción (min)	f_i
$0 \leq x < 10$	150
$10 \leq x < 20$	450
$20 \leq x < 30$	500
$30 \leq x < 40$	400

Determinamos la marca de clase y realizamos los cálculos como si fueran datos simples.

Tiempo de reacción (min)	Marcas de clase (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
$0 \leq x < 10$	5	150	150	750	3 750
$10 \leq x < 20$	15	450	600	6 750	101 250
$20 \leq x < 30$	25	500	1 100	12 500	312 500
$30 \leq x < 40$	35	400	1 500	14 000	490 000
Total		1 500		34 000	907 500

La moda es $\boxed{25}$ *(frecuencia 500).*

La mitad de los datos es 750, y la primera frecuencia acumulada mayor de 750 es 1 100, que corresponde a la marca de clase de 25. La mediana es $\boxed{25}$.

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i \cdot f_i}{N} = \frac{34\,000}{1\,500} = \boxed{22{,}6}$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2 \cdot f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{907\,500}{1\,500} - 22{,}6^2 = \boxed{94{,}24}$$

361 En un examen tipo test se han obtenido los siguientes resultados. Determina la moda, la mediana y la varianza.

Aciertos	f_i
$0 \leq x < 10$	3
$10 \leq x < 20$	15
$20 \leq x < 30$	12

Aciertos	Marcas de clase (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
$0 \leq x < 10$					
$10 \leq x < 20$					
$20 \leq x < 30$					
Total					

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

13. Estadística unidimensional

1 El número de horas que 40 personas dedican a hacer deporte diariamente es el siguiente.

0 1 1 2 3 2 1 0 0 3 0 1 1 2 2 1 1 1 0 0
0 1 2 1 1 1 3 1 0 3 2 0 2 1 1 0 2 1 1 1

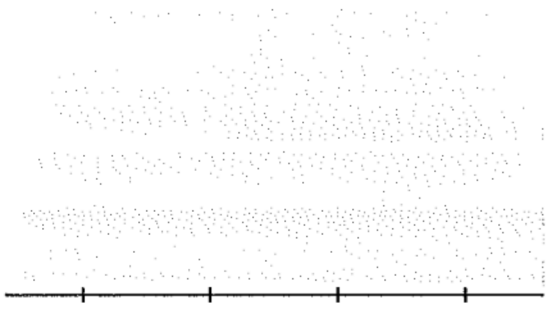
a) Completa la siguiente tabla.

N.º de horas	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
Total				

b) Calcula su moda, su mediana y su media aritmética.

c) Calcula su varianza.

d) Construye el diagrama de barras.



14. Probabilidad

1 Experimentos aleatorios y sucesos

- Un experimento se llama **aleatorio** si no se puede predecir el resultado que se va a obtener antes de realizarlo.
- **Espacio muestral (*E*)** es el conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.
- **Suceso** es cualquier parte del espacio muestral.

362 ***Se tiene una baraja española y se extrae una carta. Escribe el espacio muestral si se considera:***

a) El valor de la carta.

b) El palo que sale.

a) En el espacio muestral se incluyen todos los posibles valores que pueden aparecer en la baraja.

$$E = \{as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo, rey\}$$

b) En este espacio muestral se incluyen los cuatro palos de la baraja.

$$E = \{oros, copas, espadas, bastos\}$$

363 De los siguientes experimentos, indica cuáles son aleatorios y cuáles no, justificando la respuesta.

Ejemplo *Coger una pelota con la mano y soltarla. No es aleatorio porque sabemos que el resultado será que caiga al suelo.*

a) Sacar una carta de la baraja.

b) Medir la altura del Teide.

c) El número de personas que van al teatro un sábado.

d) La temperatura de fusión del mercurio.

364 Indica el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios.

Ejemplo *Lanzar un dado.* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a) Lanzar una moneda al aire y anotar qué cara sale.

b) Sacar una bola de una bolsa que contiene bolas con los números pares del 2 al 20 y anotar el resultado.

c) Sacar una bola de una urna que contiene 3 bolas rojas, 2 verdes y 1 amarilla, y anotar su color.

2 Probabilidad de un suceso

- **Probabilidad** de un suceso A es un número que nos indica la mayor o menor posibilidad de que ocurra dicho suceso. Se suele representar por $P(A)$. La probabilidad es un número comprendido entre cero y uno. Cuanto más próximo esté el valor a 1, mayor será la probabilidad de que ocurra.
- **Sucesos equiprobables** son aquellos que tienen la misma probabilidad de ocurrir en un experimento aleatorio.

365 Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, y razona la respuesta.

Ejemplo *La probabilidad de un suceso es un número natural.*

Falsa (la probabilidad puede ser cualquier número real entre 0 y 1).

a) La probabilidad de un suceso es siempre menor o igual que uno.

b) En un experimento con tres sucesos, ninguno puede tener una probabilidad mayor que 0,5.

c) Si $P(A)$ es mayor que $P(B)$, significa que A es más fácil que ocurra que B.

d) Una probabilidad cercana a 0 (por ejemplo, 0,1) significa que el suceso es casi seguro que ocurra.

366 ***En una clase con 18 chicas y 12 chicos se escoge una persona al azar. ¿Qué es más fácil, que resulte elegido un chico o una chica? ¿Son sucesos equiprobables?***

Como hay más chicas que chicos, es más fácil que sea elegida una chica.

Cada alumno tiene la misma probabilidad de ser escogido, pero el suceso "ser chica" no tiene la misma probabilidad que el suceso "ser chico". Por tanto, no son sucesos equiprobables.

367 Un alumno ha realizado 5 de los 8 problemas que le ha mandado su profesor de Matemáticas. Si le pide que resuelva uno, ¿qué es más fácil: que lo haya hecho o que no lo haya hecho? ¿Son sucesos equiprobables?

368 Se lanza una moneda cinco veces y siempre sale cara. En el siguiente lanzamiento, ¿qué resultado es más probable que salga?

3 Regla de Laplace

La **regla de Laplace** establece que si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, la probabilidad de que se verifique el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{N.º de casos favorables}}{\text{N.º de casos posibles}}$$

369 ***Se extrae una carta de una baraja española (40 cartas). Calcula la probabilidad de obtener los siguientes resultados.***

a) Una espada.

b) Un as.

c) Una carta que no sea copa.

Sacar una carta de la baraja es un suceso equiprobable, por lo que podemos aplicar la regla de Laplace. Los casos posibles serán las 40 cartas de la baraja.

a) Existen solo 10 cartas de espadas, es decir, los casos favorables de que salgan espadas serán 10.

Por tanto: $P(\text{espadas}) = \frac{10}{40} = \boxed{0{,}25}$

b) Hay cuatro ases en la baraja, los casos favorables serán 4.

Por tanto: $P(\text{as}) = \frac{4}{40} = \boxed{0{,}1}$

c) En este caso calcularemos primero la probabilidad de que salga una copa. Hay 10 cartas de copas en la baraja, los casos favorables serán 10.

Por tanto: $P(\text{copas}) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

La probabilidad de que no salgan copas será: $1 - P(\text{copas}) = 1 - 0{,}25 = \boxed{0{,}75}$

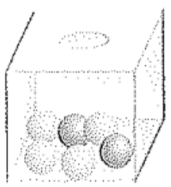
370 Una urna contiene 4 bolas blancas, 3 azules, 2 rojas y una negra. Se saca una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola azul?

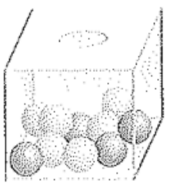
371 Se lanza un dado de seis caras. Calcula la probabilidad de obtener los siguientes resultados.

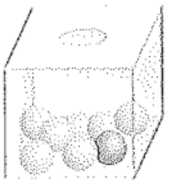
a) Un número par.

b) Un número primo.

372 Calcula la probabilidad de sacar una bola gris en cada una de las siguientes urnas.

a) 

b) 

c) 

373 Una rifa consta de 500 números y has comprado 12 papeletas. ¿Cuál es la probabilidad de llevarte el premio?

374 De una urna con 8 bolas blancas y 2 negras se saca una al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra? ¿Y de que no lo sea?

375 En una caja hay 500 bolas iguales, 180 de ellas son blancas, y el resto, azules. Sacamos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul?

376 En un dado de 20 caras se considera el suceso *A*, "obtener un número primo". Calcula su probabilidad.