Actividades de Matemáticas de Pendientes

de 3º de ESO

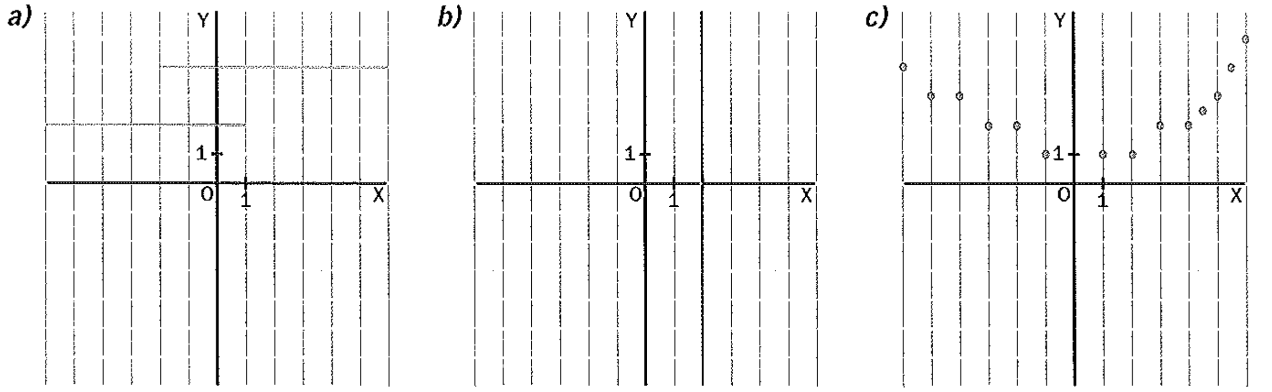
Trimestre 3

11. Funciones

1 Relaciones funcionales

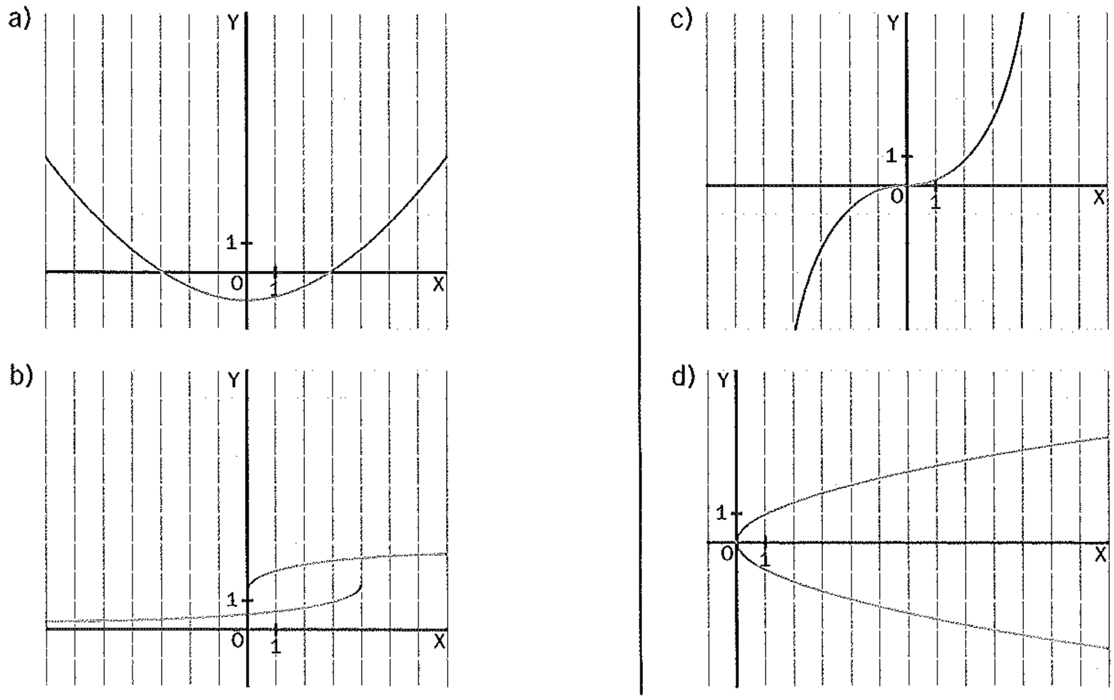
- Una **función** es la relación existente entre dos magnitudes, de forma que a cada valor de la primera le corresponde un único valor de la segunda. A este valor se le llama **imagen**.
- Las magnitudes que intervienen en una función son:
  - **La variable independiente** (x), que se fija previamente.
  - **La variable dependiente**, $y = f(x)$, cuyo valor se obtiene a partir del valor de la variable independiente.

301 ***Indica cuál de las tres gráficas es función y justifica la respuesta.***



Solo es función la tercera gráfica. En las otras dos hay valores de x *a los que les corresponde más de una imagen; en particular en la segunda, un solo punto (*x *= 2) tiene infinitas imágenes.*

302 Indica si las siguientes gráficas son funciones.



303 En las siguientes relaciones, indica cuáles son las variables independiente y dependiente.

Ejemplo *Cada litro de leche cuesta 0,60 euros.*

Cuanta más leche compremos, más costará. Por tanto:

Variable independiente: cantidad de leche. Variable dependiente: precio final.

a) Cuanto mayor es la velocidad de un coche, más gasolina gasta cada 100 kilómetros.

b) A medida que pasa el tiempo quedan menos ballenas azules en los océanos.

c) Cuanto más estudio Matemáticas, más nota consigo.

304 Dada la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$, calcula el valor que toma la variable dependiente, $f(x)$, según los valores de la variable independiente, x, dados.

Ejemplo $x = 4$ $\quad f(4) = 4^2 + 3 \cdot 4 - 1 = 16 + 12 - 1 = 27$

a) $x = 2$

b) $x = -5$

c) $x = 0$

305 Dada la función $f(x) = 2x - 1$, calcula el valor de la variable x para que la imagen tenga el valor indicado.

Ejemplo $f(x) = 11$ $\quad 11 = 2x - 1 \Rightarrow$ *Se resuelve la ecuación* $\Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = 5$

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = -7$

c) $f(x) = 0$

2 Formas de expresar una función

Una función puede expresarse de varias formas:

- Mediante una **fórmula**.
- Mediante una **tabla**.
- Mediante una **gráfica**.

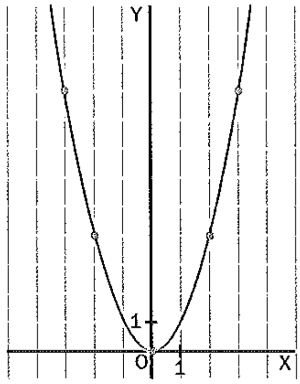
306 ***Encuentra la relación entre las variables dada por la siguiente tabla y representa la función.***

x	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*0*	*1*	*4*	*9*

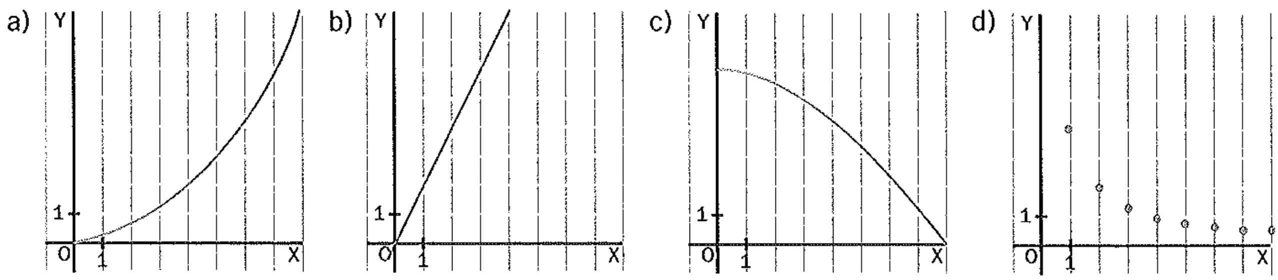
Si observamos los valores que toma f(x) *con respecto a los valores de* x*, vemos que* f(x) *es el cuadrado de* x*; por tanto, esta función la podemos expresar en forma de fórmula como:* $f(x) = x^2$.

Para realizar la gráfica partimos de los valores de la tabla dados y completamos estos datos con algún punto más obtenido de dar valores negativos a x*. Todos estos puntos los representamos en la gráfica y los unimos mediante una línea.*

x	−1	−2	−3
f(x)	1	4	9



307 Relaciona las gráficas siguientes con las situaciones indicadas.



I. Precio de una bolsa de patatas dependiendo de su peso.

II. Diámetro de un globo cuando sale el aire lentamente.

III. Duración de una carrera según su longitud.

IV. Tiempo que se tarda en acabar un trabajo dependiendo del número de personas.

308 A partir de los valores dados de *x*, construye una tabla de valores para cada función.

Ejemplo $f(x) = x^2 - x$

Damos valores a la x, *sustituimos en* f(x) *y calculamos los valores de* f(x) *correspondientes.*

x	*f(x)*
−3	$(-3)^2 - (-3) = 12$
−2	$(-2)^2 - (-2) = 6$
−1	$(-1)^2 - (-1) = 2$
0	$0^2 - 0 = 0$
1	$1^2 - 1 = 0$
2	$2^2 - 2 = 2$
3	$3^2 - 3 = 6$

a) $f(x) = 2x - 3$

x	*f(x)*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

b) $f(x) = 8 - 2x$

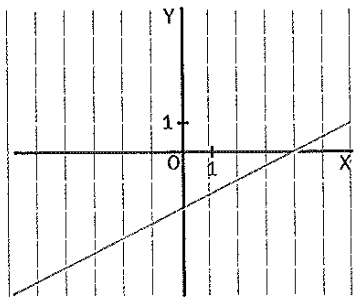
x	*f(x)*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

c) $f(x) = x^2 + 1$

x	*f(x)*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	
3	

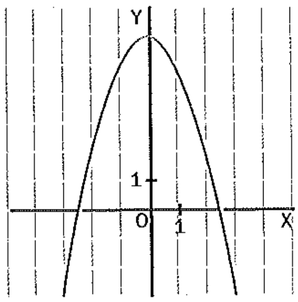
309 Completa la tabla de valores para estas dos funciones a partir de sus gráficas.

a)



x	*f(x)*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	

b)

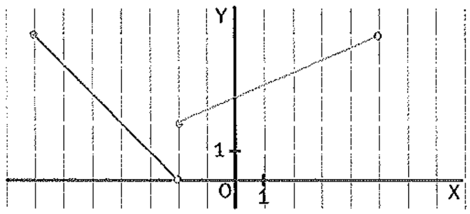


x	*f(x)*
−3	
−2	
−1	
0	
1	
2	

3 Estudio gráfico de funciones: dominio, recorrido, continuidad, simetría y periodicidad

- **Dominio**: es el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- **Recorrido**: son los valores que toma la variable dependiente.
- Una función **continua** es aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.
- Una función es **simétrica respecto al eje *OY*** cuando su gráfica también lo es.
- Una función es **simétrica respecto al origen** cuando su gráfica también lo es.
- Una función es **periódica** cuando los valores que toma la variable dependiente, $f(x)$, se repiten cada cierto intervalo fijo, llamado **período**.

310 ***Indica el dominio y el recorrido de la función que se muestra en la gráfica. ¿En qué puntos la función no es continua?***



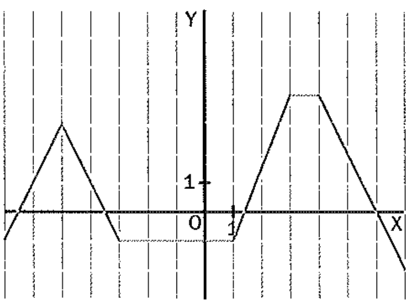
Dominio: desde -7 hasta -2 y desde -2 hasta 5 (los valores de x).

Recorrido: desde 0 hasta 5 (los valores de y).

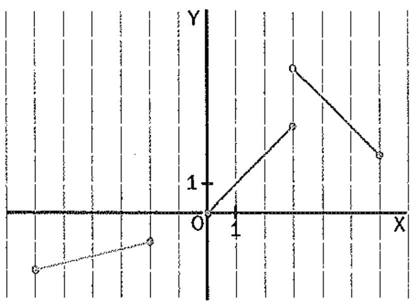
La función no es continua en el punto $x = -2$. En este punto la imagen es 2, y no 0. Esto se indica con el punto relleno que quiere decir que la función está definida en ese punto, y con un círculo en el punto donde no está definida la función.

311 Obtén el dominio y el recorrido de las funciones siguientes.

a)

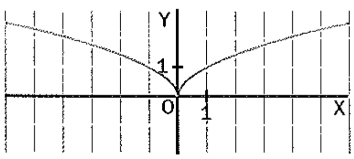


b)

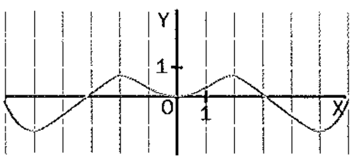


312 Indica cuáles de las siguientes funciones son continuas.

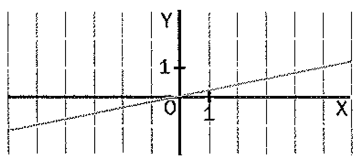
a)



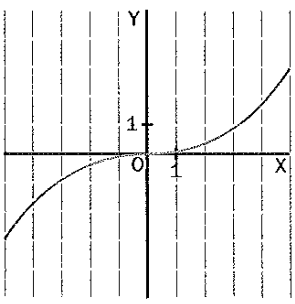
c)



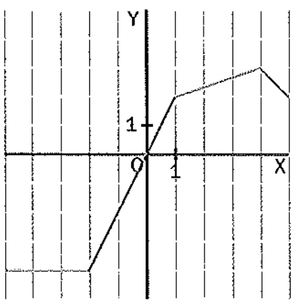
e)



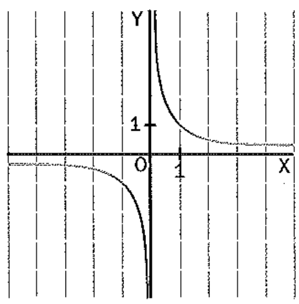
b)



d)



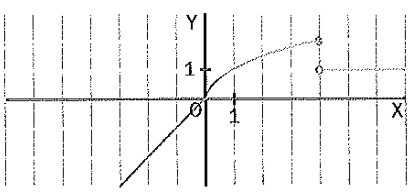
f)



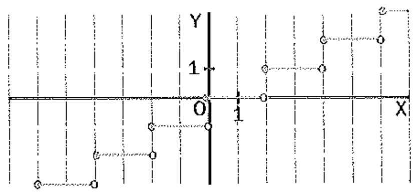
– Son continuas las funciones ....

313 Indica en qué puntos las funciones representadas no son continuas.

a)

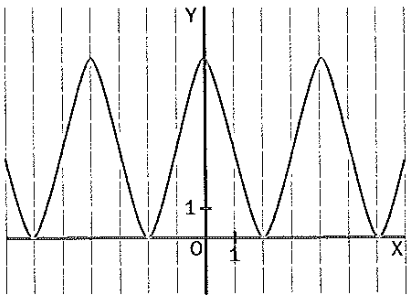


b)

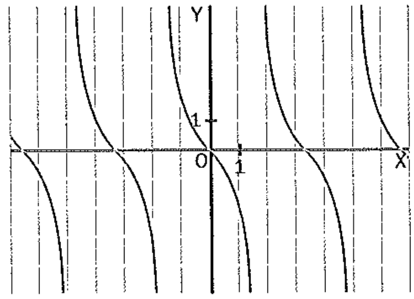


314 ***Observa las siguientes funciones y determina si son simétricas respecto al eje OY o respecto al origen.***

a)



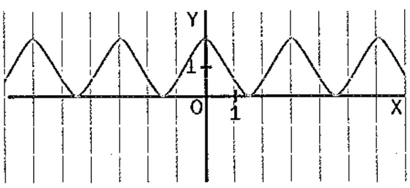
b)



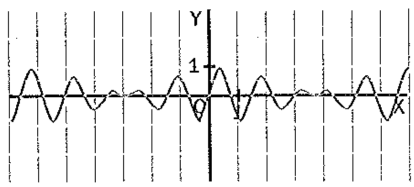
La primera gráfica es simétrica respecto al eje OY, y la segunda lo es respecto al origen.

315 De las siguientes funciones, indica las que sean simétricas respecto al eje *OY*, las que sean simétricas respecto al origen y las funciones periódicas.

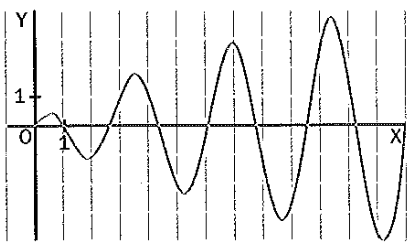
a)



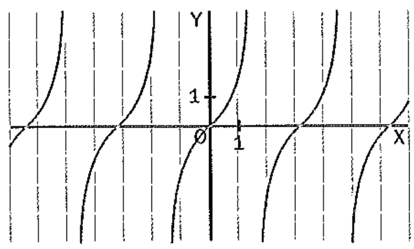
c)



b)



d)



– Son simétricas respecto al eje *OY* las funciones ....

– Son simétricas respecto al origen las funciones ....

– Son periódicas las funciones ....

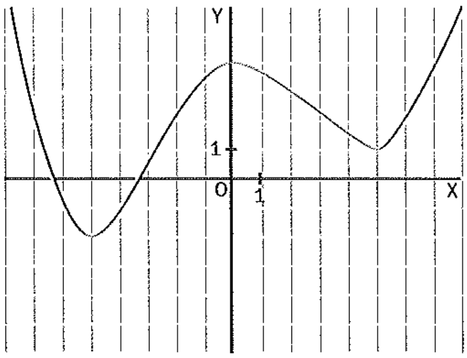
4 Estudio gráfico de funciones: crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos

- Una función es **creciente** si al aumentar los valores de la variable x aumentan los de $f(x)$.
- Una función es **decreciente** si al aumentar los valores de la variable x disminuyen los de $f(x)$.
- **Máximos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es mayor que la de los puntos próximos (tanto a su izquierda como a su derecha).
- **Mínimos relativos** de una función son los puntos en los que su ordenada es menor que la de los puntos próximos.
- Los máximos de mayor valor de la función se llaman **máximos absolutos,** y los mínimos de menor valor, **mínimos absolutos.**

316 ***Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función que se muestra en la gráfica.***

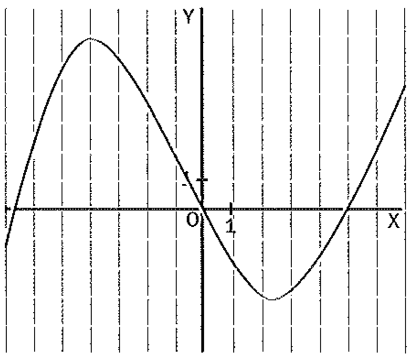
Es decreciente desde $x = -8$ *hasta* $x = -5$ *y desde* $x = 0$ *hasta* $x = 5$.

Es creciente desde $x = -5$ *hasta* $x = 0$ *y desde* $x = 5$ *hasta* $x = 8$.

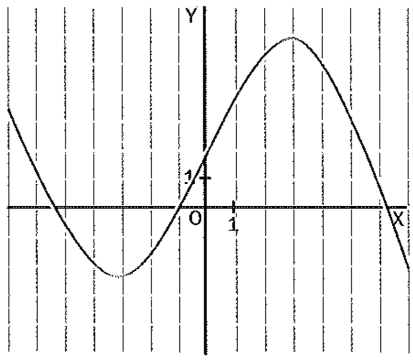


317 Marca de azul las partes crecientes y de rojo las decrecientes de las siguientes funciones.

a)

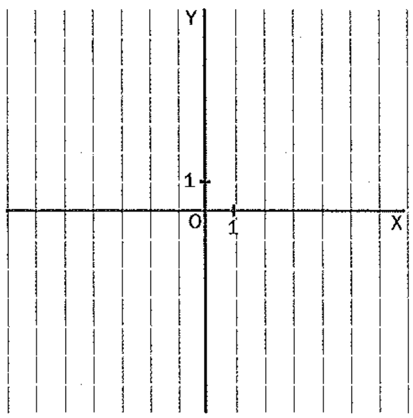


b)



318 Dibuja una función que cumpla las siguientes características.

- Sea creciente entre $x = -8$ y $x = -2$.
- Constante entre $x = -2$ y $x = 1$.
- Creciente entre $x = 1$ y $x = 3$.
- Decreciente entre $x = 3$ y $x = 8$.



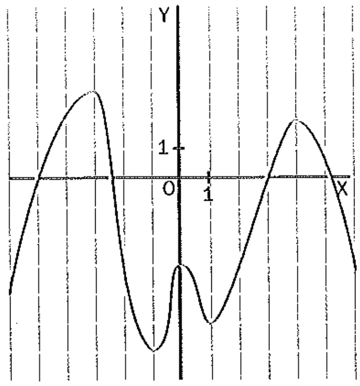
319 ***Indica en qué valores de la variable x hay máximos o mínimos relativos en la siguiente función, y determina los máximos y los mínimos absolutos.***

Los máximos de esta función son los puntos (−3, 3), (0, −3) y (4, 2).

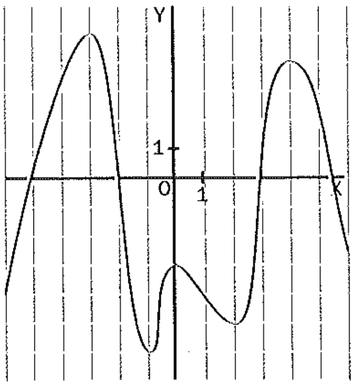
El máximo absoluto es el punto (−3, 3) y los relativos: (0, −3) y (4, 2).

Los mínimos de la función son los puntos: (−1, −6) y (1, −5).

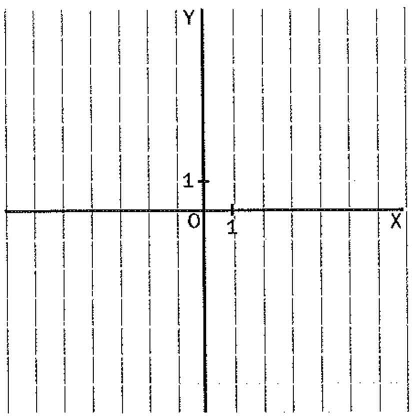
El mínimo absoluto es el punto (−1, −6) y el relativo el (1, −5).



320 Identifica en la siguiente gráfica los máximos y los mínimos.



321 Dibuja una gráfica que tenga un máximo relativo en el punto (4, 5), un mínimo relativo en el punto (−1, −3) y un máximo absoluto en el punto (7, 10).



5 Funciones y vida cotidiana

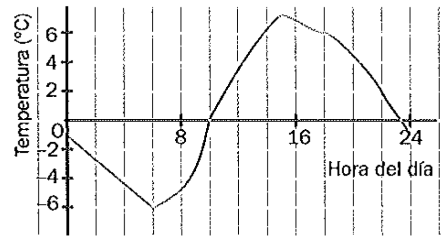
En la vida diaria, gran cantidad de información nos llega expresada a través de gráficas y funciones.

322 ***La siguiente gráfica nos muestra las temperaturas de un día de invierno en Toledo.***

a) ¿Es una función?

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima?

c) ¿A qué hora se produjo?



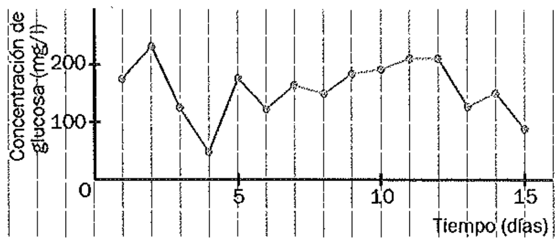
a) Sí, ya que a cada valor de x (hora del día) le corresponde un único valor de y (temperatura).

b) 7 grados centígrados.

c) A las 15.00 (tres de la tarde).

323 La siguiente gráfica muestra los datos de glucosa de Óscar, un niño diabético, a primera hora de la mañana durante 15 días. A partir de su observación, responde a las siguientes preguntas.

a) ¿Es una función?

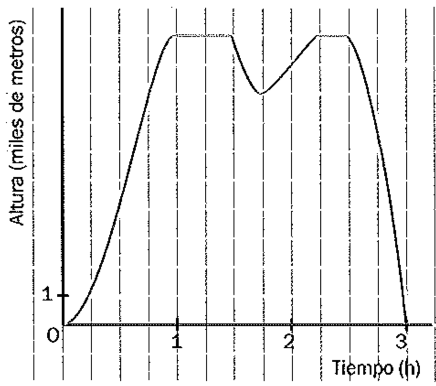


b) ¿Qué día tuvo la concentración más alta?

c) ¿Qué días la concentración de glucosa fue inferior a 100 miligramos por litro?

324 La variación de altura realizada por un avión en un vuelo de 3 horas viene reflejada en la siguiente gráfica.

a) ¿En qué momento se alcanza la altura máxima?

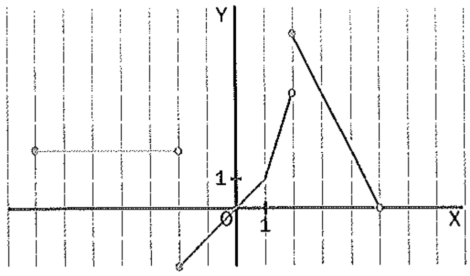


b) Durante el vuelo, el avión, por motivos de turbulencias, se ve obligado a descender para luego volver a subir. ¿Cuánto dura ese período de tiempo?

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

11. Funciones

1 A partir de la siguiente función, determina:

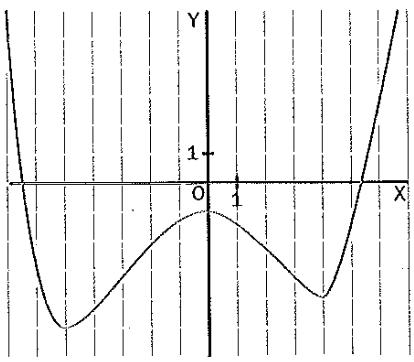


a) El dominio y el recorrido.

b) Indica las imágenes de dicha función en los puntos $x = -5$ y $x = 0$.

c) ¿Es continua la función? En caso negativo, indica los puntos donde no es continua.

2 Observa la siguiente gráfica y responde.



a) Indica los intervalos en los que la siguiente función es creciente.

b) ¿En qué puntos hay mínimos relativos?

c) Calcula las coordenadas del máximo de la función.

12. Funciones lineales

1 Función constante

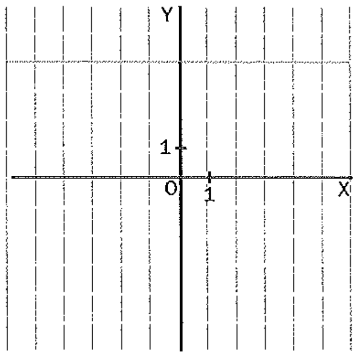
- Una **función constante** se representa con la expresión $f(x) = k$, donde k es un número cualquiera.
- Su representación es una recta horizontal que corta el eje OY (ordenadas) en el punto (O, k).

325 ***Representa la función*** $f(x) = 4$.

Damos valores a x, siendo el valor de f(x) siempre 4, porque es una función constante.

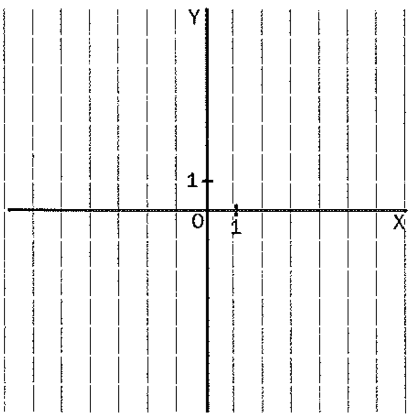
La representación corresponde a una recta horizontal paralela al eje OX.

x	$f(x)$
−2	4
−1	4
0	4
1	4
2	4

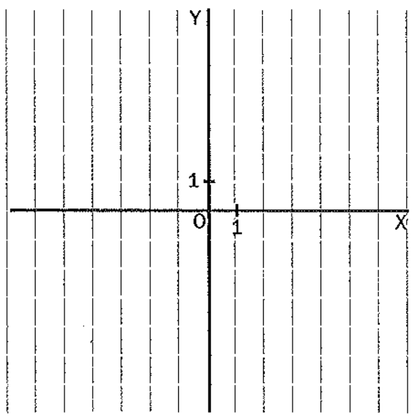


326 Representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2$



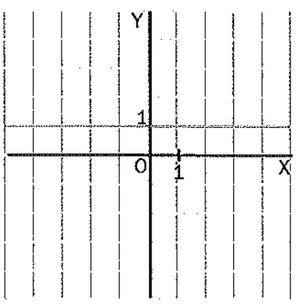
b) $f(x) = -3$



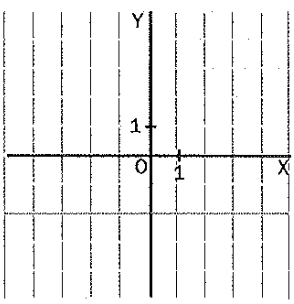
327 Une con una flecha cada función con su expresión correspondiente.

a) $f(x) = -2$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = 1$ d) No es función.

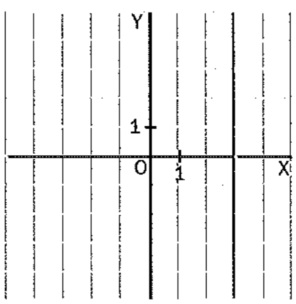
I.



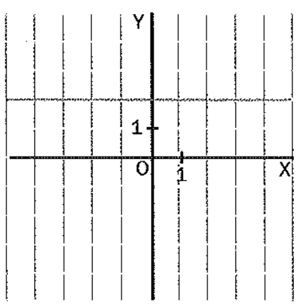
II.



III.



IV.



2 Función de proporcionalidad directa

- Una **función de proporcionalidad directa** viene determinada por la expresión $f(x) = mx$, donde m es un número cualquiera y se denomina **pendiente**.
- Su representación es una línea recta que pasa por el origen de coordenadas (0, 0). Si $m > 0$, la función es creciente. Si $m < 0$, la función es decreciente.

328 Indica la pendiente de las siguientes funciones.

Ejemplo $f(x) = -3x$ *Pendiente* $= -3$

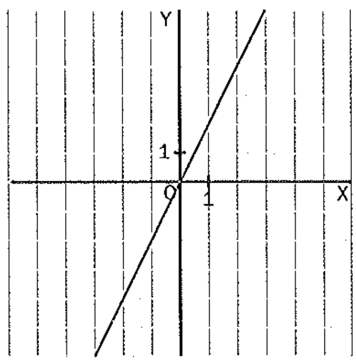
a) $f(x) = -4x$ b) $f(x) = 0{,}2x$ c) $f(x) = \frac{3}{2}x$ d) $f(x) = -2{,}5x$

329 ***Representa en una gráfica la función*** $f(x) = 2x$.

Damos valores a x y calculamos el valor de f(x). Los resultados los recogemos en una tabla.

Finalmente representamos los puntos en la gráfica y los unimos mediante una recta.

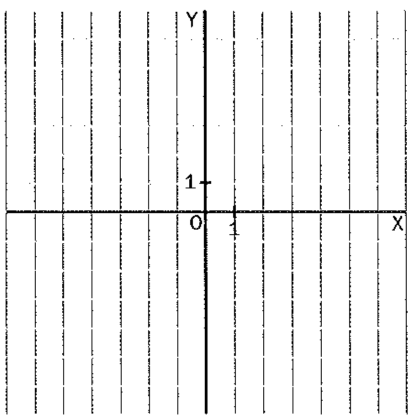
x	f(x)
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4



330 Representa las siguientes funciones.

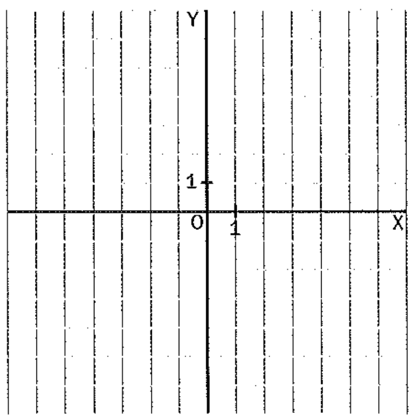
a) $f(x) = 0{,}5x$

x	−2	−1	0	1	2
f(x)					



b) $f(x) = -2x$

x	−2	−1	0	1	2
f(x)					



3 Función lineal

- Una **función lineal** se representa mediante la fórmula $f(x) = mx + n$, donde m y n son números cualesquiera. A m se la denomina **pendiente**, y a n, ordenada en el origen. Si $n = 0$, las funciones son de **proporcionalidad directa**.
- Su representación es una línea recta que corta el eje OY (ordenadas) en el punto $(0, n)$. Si $m > 0$, la función es creciente. Si $m < 0$, la función es decreciente.

331 Escribe la expresión de la función lineal que cumple las siguientes condiciones.

Ejemplo *Pendiente 2 y ordenada en el origen 5* $\Rightarrow f(x) = 2x + 5$

a) Pendiente 6 y ordenada en el origen −3

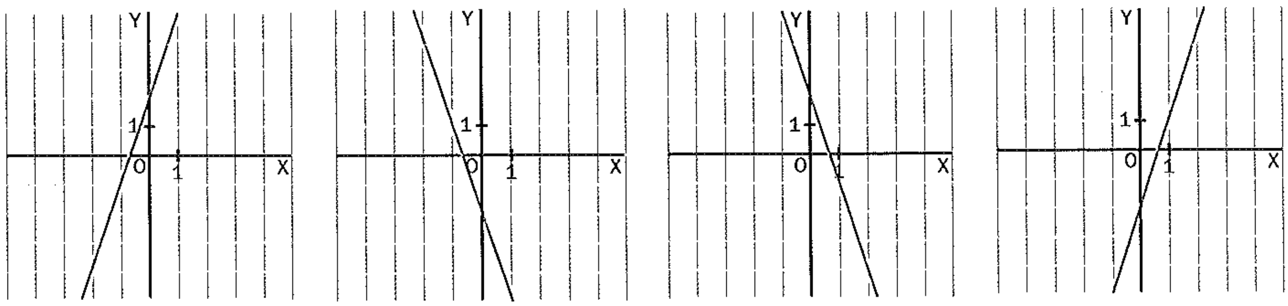
b) Pendiente −2 y ordenada en el origen 5

c) Pendiente −1 y ordenada en el origen −8

332 Relaciona mediante una flecha cada expresión matemática con su gráfica correspondiente.

a) $f(x) = -3x - 2$ b) $f(x) = 3x - 2$ c) $f(x) = 3x + 2$ d) $f(x) = -3x + 2$

I. II. III. IV.



333 Completa la siguiente tabla.

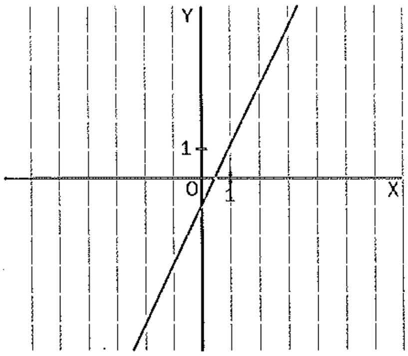
Función lineal	Pendiente	Ordenada en el origen	Crecimiento / Decrecimiento
$f(x) = x + 3$	*1*	*3*	*Creciente*
$f(x) = 5x - 4$			
$f(x) = 7 - 2x$			
	−4	−6	
	2,5	−3,5	

334 *Representa la función* $f(x) = 2x - 1$.

Damos valores a x y completamos la tabla de valores.

A partir de estos datos dibujamos la gráfica.

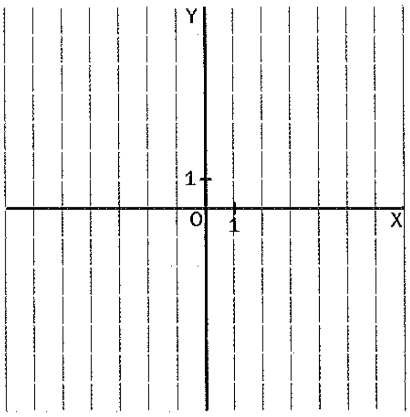
x	$f(x)$
-2	-5
-1	-3
0	-1
1	1
2	3
3	5



335 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

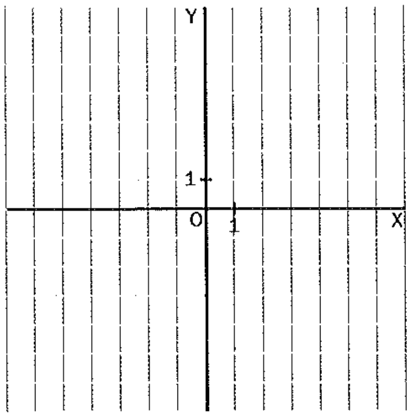
a) $f(x) = 1 - x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



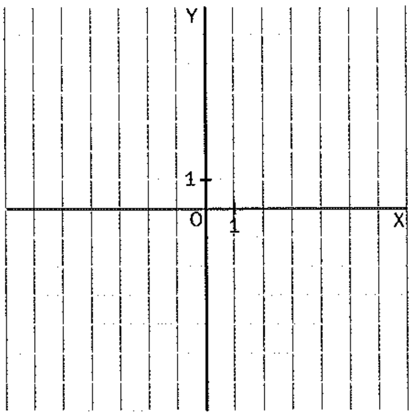
b) $f(x) = 0{,}5x - 2$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					



336 Dibuja en los ejes de coordenadas cuatro rectas que cumplan lo siguiente: pendiente 2 y ordenadas en el origen, respectivamente, 1, 4, -2, -5.

¿Qué observas en estas rectas?



340 Dos talleres de coches tienen las siguientes tarifas:

1.° El primero cobra un fijo de 40 euros más 12 euros por hora trabajada.

2.° El segundo no cobra fijo, pero cobra a 20 euros por hora trabajada.

a) Escribe las fórmulas que relacionan el coste de una reparación dependiendo del número de horas trabajadas para cada taller.

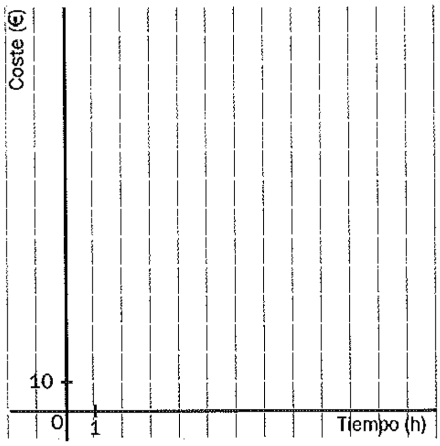
b) Representa en unos ejes ambas funciones.

1.

x	$f(x)$

2.

x	$g(x)$



c) ¿Cuánto tiene que durar la reparación para que el coste de ambos talleres sea el mismo?

d) ¿Cuándo es más barato escoger el primer taller?

e) ¿Cuándo es más barato escoger el segundo taller?

f) Si tuvieras que hacer una reparación en la que se tarda 4 horas, ¿a qué taller irías?

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

12. Funciones lineales

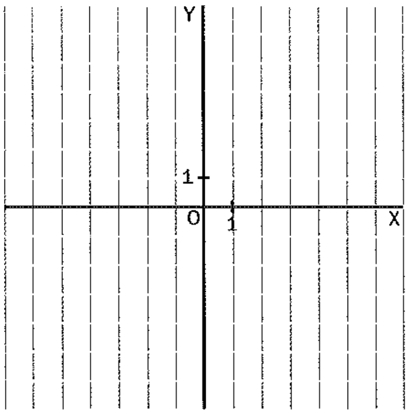
1 **Indica en cada caso la pendiente y la ordenada en el origen de las funciones.**

a) $f(x) = 5 - 3x$ b) $f(x) = 2x - 7$ c) $f(x) = 4x$

2 **Representa las siguientes funciones.**

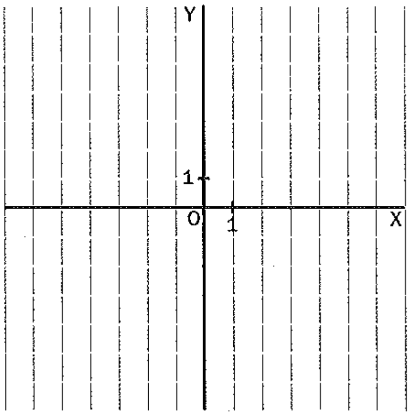
a) $f(x) = 3 - 2x$

x			
f(x)			



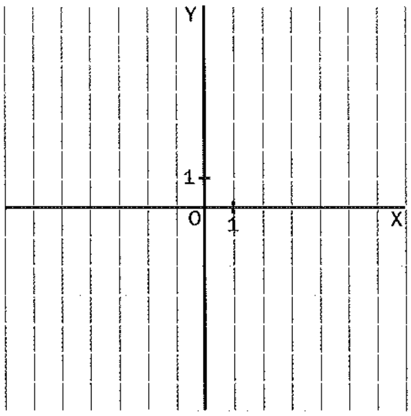
b) $f(x) = -5$

x			
f(x)			



c) $f(x) = x$

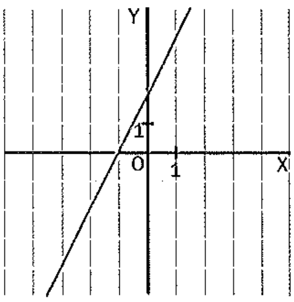
x			
f(x)			



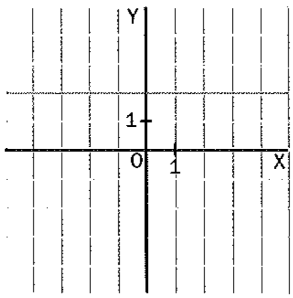
3 **Relaciona mediante una flecha cada fórmula con su gráfica.**

a) $f(x) = 2 - 2x$ b) $f(x) = 2x$ c) $f(x) = 2x + 2$ d) $f(x) = 2$

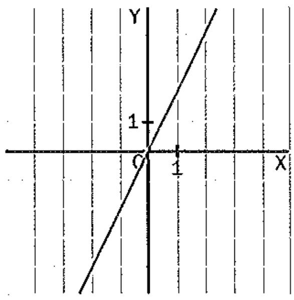
I.



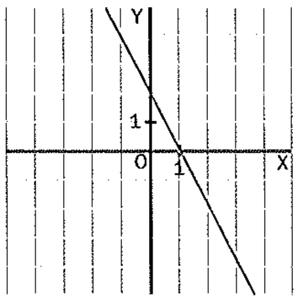
II.



III.



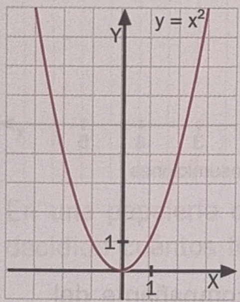
IV.



4 **Un coche está a 1200 kilómetros de su casa y viene hacia ella a una velocidad de 100 kilómetros por hora. Escribe la fórmula de la función que relaciona la distancia que le falta por recorrer con el número de horas.**

2 Función de segundo grado: la parábola. Aplicaciones

- En su forma más general, la **función de segundo grado** es así: $y = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$.
- Si los coeficientes *b*, *c*, o ambos, valen 0, queda así: $y = ax^2 + c$; $y = ax^2 + bx$; $y = ax^2$
- Su gráfica es una **parábola**, con eje de simetría vertical.
- Si el coeficiente *a* es positivo, la parábola tiene forma de "valle". Si es negativo, la forma es de "montaña".
- Se llama **vértice** de la parábola al punto donde la curva tiene un máximo o un mínimo.



- El valor de la abscisa del vértice es: $x = \dfrac{-b}{2a}$
- La función $y = x^2$ es la más simple ($a = 1$, $b = c = 0$). Suele tomarse como modelo para decir si la gráfica de otra parábola es igual que ella, o bien parece más estrecha o más ancha.

En resumen: $\begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{"valle"} \\ a < 0 \rightarrow \text{"montaña"} \end{cases}$ $\begin{cases} |a| > 1 \rightarrow \text{estrecha} \\ |a| = 1 \rightarrow \text{normal} \\ |a| < 1 \rightarrow \text{ancha} \end{cases}$

273 ***Di qué forma tendrán las gráficas de las siguientes funciones***

a) $y = 2x^2 - 12x + 14$	→	$2 > 0$	→	valle	;	$\|2\| > 1$	→	estrecha
b) $y = -x^2 + 8x - 12$	→	$-1 < 0$	→	montaña	;	$\|-1\| = 1$	→	normal
c) $y = x^2/2 - x$	→	$1/2 > 0$	→	valle	;	$\|1/2\| < 1$	→	ancha
d) $y = x^2 - 2x - 8$	→	$1 > 0$	→	valle	;	$\|1\| = 1$	→	normal
e) $y = -x^2/5$	→	$-1/5 < 0$	→	montaña	;	$\|-1/5\| < 1$	→	ancha
f) $y = -4x^2 + 4$	→	$-4 < 0$	→	montaña	;	$\|-4\| > 1$	→	estrecha

274 Halla el vértice de cada una de estas parábolas.

Ejemplo $y = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ *Punto: V (2, 1)*

a) $y = 2x^2 + 12x + 20$

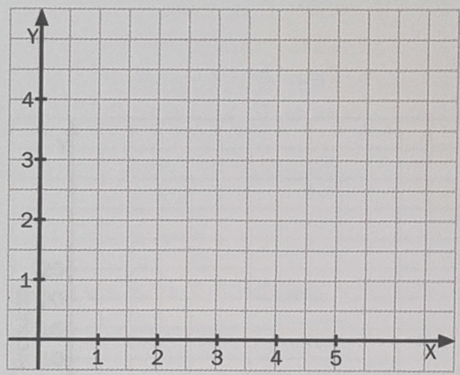
b) $y = \dfrac{x^2}{2} - 2x$

275 Te dan la función $y = x^2 - 6x + 10$, y te dicen que solo está definida para estos nueve valores de *x*:

$$x = 1 \;;\; x = 1{,}5 \;;\; x = 2 \;;\; x = 2{,}5 \;;\; x = 3 \;;\; x = 3{,}5 \;;\; x = 4 \;;\; x = 4{,}5 \;;\; x = 5.$$

a) Halla los valores correspondientes de la función, y exprésalos en forma de tabla.

b) Con ayuda de los ejes dados, representa gráficamente dichos valores de *y*.

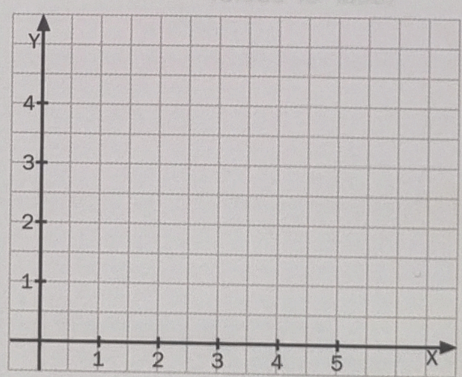


276 Ahora te dan la función $y = -x^2 + 4x$, pero te dejan libertad para dar a *x* los valores que quieras.

a) Describe de modo somero cómo será la gráfica (tipo de curva, ancha o estrecha, etc.).

b) Halla su vértice.

c) Haz una tabla de valores y dibuja la gráfica utilizando los ejes dados. *(Será bueno que des a x valores próximos a la abscisa del vértice.)*



277 Halla los puntos de corte de las siguientes curvas con los ejes coordenados.

Ejemplo $y = x^2 - 4x + 3$

Corte con el eje OY (se hace x = 0): $y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \rightarrow$ *Punto: A(0,3)*

Posibles cortes con el eje OX (se hace y = 0): $x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm 2}{2} \;\rightarrow$

$\rightarrow$ *Queda:* $x = 1$, $x = 3 \rightarrow$ *Puntos: B(1, 0) y C(3, 0)*

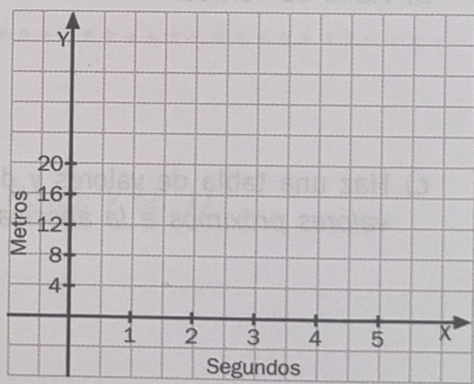
a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = x^2 - 4x + 5$

278 Cuando un portero de fútbol saca desde su área, el balón describe una parábola. Si el tiempo que transcurre desde que golpea el balón, en segundos, es *x*, y la altura del balón con respecto al suelo, en metros, es *y*, esta, la altura, viene dada por la fórmula:

$$y = -4x^2 + 16x$$

a) Haz la gráfica del movimiento de manera que muestre la relación entre el tiempo, *x*, y la altura, *y*.

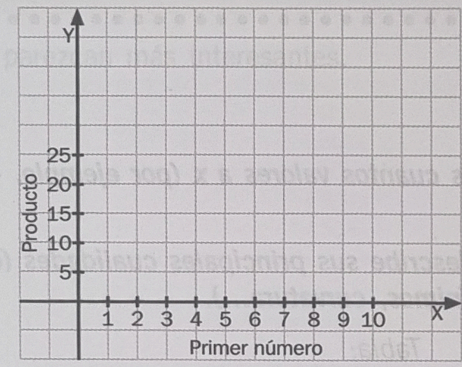


b) ¿Qué altura máxima alcanzará el balón? ¿Cuándo volverá a tocar el suelo?

279 La suma de dos números es 10. ¿Cuánto tendrán que valer para que su producto sea el mayor posible?

a) Razónalo a ojo, sin referirte a ninguna función.

b) Razónalo empleando una función y haciendo su gráfica.



280 Si desde lo alto de una torre dejas caer una pequeña piedra, la distancia recorrida *y*, en metros, al cabo de *x* segundos, es $y = 4{,}9\ x^2$.

a) Si tarda 5 segundos en llegar al suelo, ¿qué altura tiene la torre?

b) Si la torre midiera 220 metros, ¿cuánto tardaría la piedra en caer?