Actividades de Matemáticas de Pendientes

de 2º de ESO

Trimestre 3

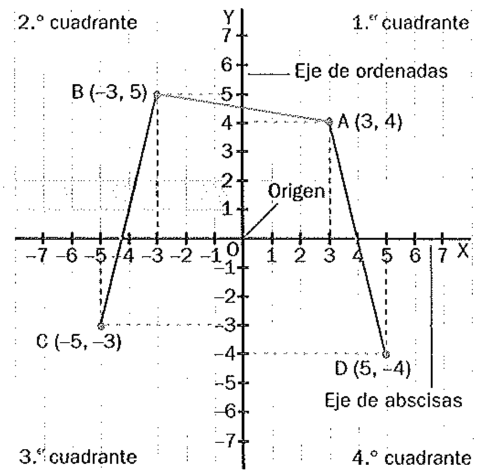
9. Gráficas y funciones

1 Puntos y gráficas en el plano

- Un punto queda definido en el plano por dos números ordenados (a, b).
  - El primer número corresponde al eje horizontal o **eje de abscisas** ***(OX)***.
  - El segundo número corresponde al eje vertical o **eje de ordenadas** ***(OY)***.

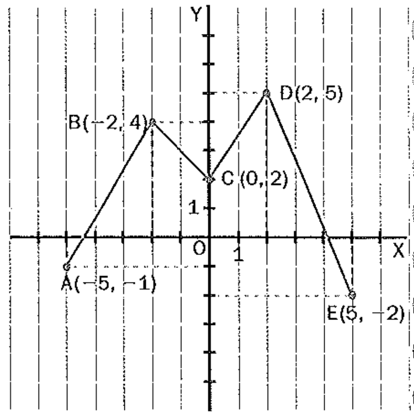
Estos ejes se denominan **ejes de coordenadas.**

- Una **gráfica** es la representación de un conjunto de puntos sobre los ejes de coordenadas. Muchas veces, estos puntos se pueden unir mediante una línea.



337 ***Representa en el plano de la figura la siguiente serie de puntos. Después, únelos con una línea poligonal según el orden dado.***

A(−5, −1), B(−2, 4), C(0, 2), D(2, 5), E(5, −2)



338 Indica a qué cuadrante pertenecen los siguientes puntos.

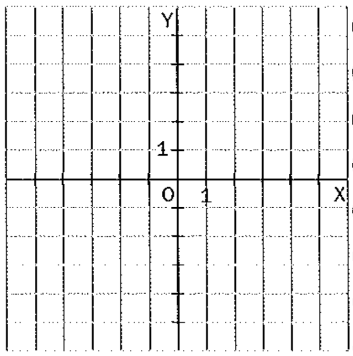
a) $A(-3, 1)$

b) $B(-2, -4)$

c) $C(2, -4)$

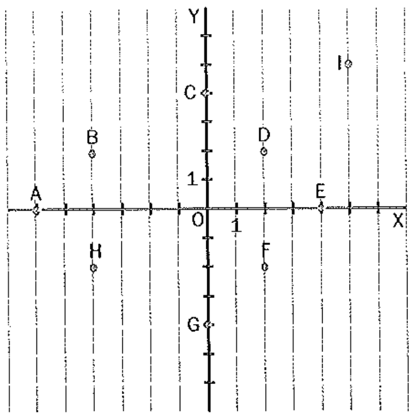
d) $D(3, 1)$

339 Dibuja en el plano los puntos $A(-5, -2)$ y $B(3, 6)$ y únelos mediante una línea recta. Después, da las coordenadas de otros dos puntos que pertenezcan a la misma recta.



340 Observa los puntos representados en la gráfica. ¿Cuáles son sus coordenadas?

Ejemplo A(−6, 0)



341 La siguiente gráfica se dibujó anotando el peso en kilogramos de David cada año durante 13 años.

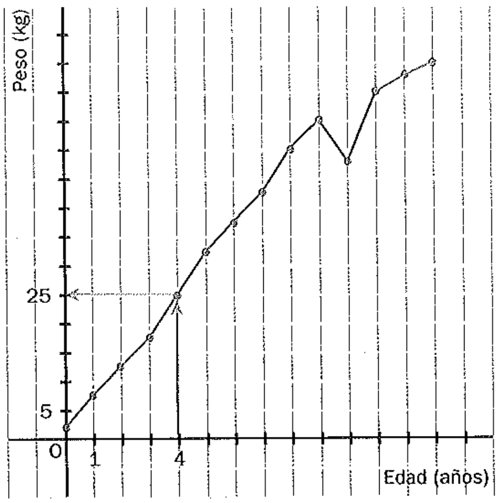
Ejemplo ¿Cuánto pesaba a los 4 años? Nos fijamos en el eje de abscisas en el punto que corresponde a 4 años de edad y subimos a la gráfica a ver qué valor le corresponde de ordenadas: 25 kg.

a) ¿Entre qué valores estaba su peso a los 6 años?

b) ¿A qué edad pesaba 50 kilogramos?

c) ¿En qué período de tiempo adelgazó?

d) ¿Cuánto aumentó su peso en los dos últimos años?



342 En la siguiente gráfica se han representado siete provincias españolas situándolas según el número de habitantes, en el eje de abscisas, y la superficie, en el eje de ordenadas. Observa el diagrama y completa las siguientes frases.

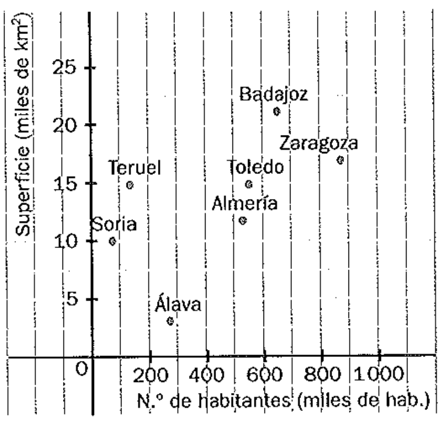
a) La provincia más extensa de las representadas es ....

....

b) La de mayor número de habitantes es ....

c) La de menor extensión es ....

d) La de menor número de habitantes es ....



2 Tablas de valores y gráficas

- La relación entre dos magnitudes puede venir dada por una **tabla de valores.** Cada par de valores de la tabla se representa como un punto en el plano.
- Las magnitudes también se pueden relacionar con **fórmulas**.
- La **representación gráfica** de estas magnitudes se puede realizar a partir de una tabla de valores o de la fórmula.

343 ***La siguiente tabla de valores se ha obtenido midiendo el volumen y la masa de cinco muestras de granito encontradas en una montaña.***

a) Representa en el plano los valores de la tabla.

b) Une, si tiene sentido, los puntos con una línea en el orden en que están escritos. ¿Qué tipo de línea se obtiene?

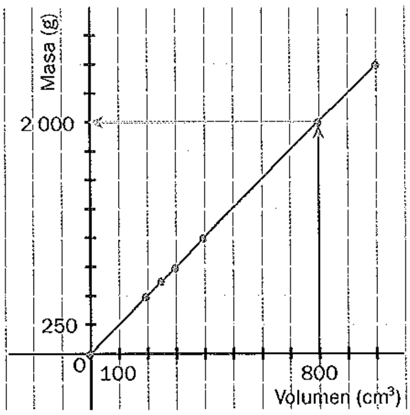
Volumen (cm^3)	*200*	*250*	*300*	*400*	*1 000*
Masa (g)	*500*	*625*	*750*	*1 000*	*2 500*

c) Estima la masa de otra muestra de 800 centímetros cúbicos de la misma roca a través de la gráfica.

a) Las abscisas son los valores del volumen, y las ordenadas, los valores de la masa. Los ejes de la gráfica deben tener una escala tal que permita representar los valores de la tabla.

b) Como a una roca de volumen intermedio le correspondería una masa, también tiene sentido unir los puntos. La línea que resulta es una $\boxed{\textit{recta}}$.

c) A partir de la gráfica, una muestra de 800 cm^3 se estima que tiene una masa de $\boxed{\textit{2000 g}}$.



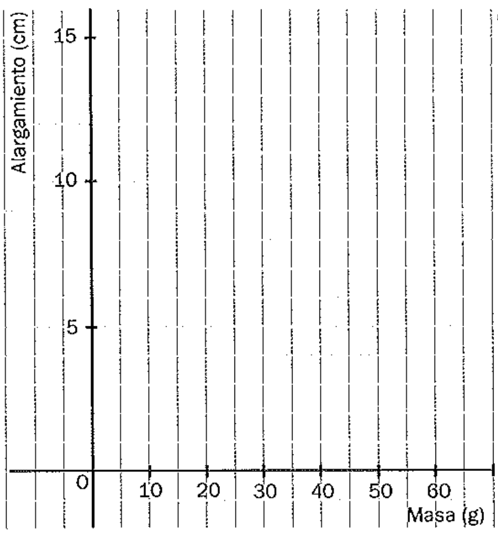
344 En la siguiente tabla se dan los valores correspondientes a distintas masas que se cuelgan de un muelle y a los alargamientos que producen en este

Masa (g)	10	20	30	40	50
Alargamiento (cm)	2	4	6	9	14

a) Representa en el plano los valores de la tabla.

b) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

c) Estima, utilizando la gráfica, el alargamiento del muelle si se cuelga una masa de 45 gramos.



345 *El profesor de Matemáticas dice a sus alumnos: "Asigna a cada abscisa entera mayor que -5 y menor que 4 el doble del resultado de sumarle 1".*

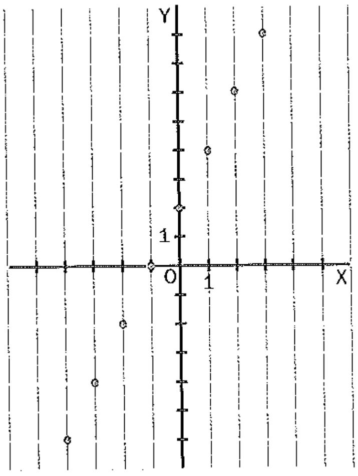
a) Escribe la fórmula que corresponde a dicha expresión y, a partir de ella, elabora una tabla de valores.

b) Dibuja la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

a) Las ordenadas, y, son los valores en que se transforman las abscisas según esta fórmula: $\boxed{y = 2 \cdot (x + 1)}$. Teniendo en cuenta lo dicho por el profesor, las abscisas que utilizaremos deberán estar comprendidas entre -4 y 3.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2 \cdot (x + 1)$	-6	-4	-2	0	2	4	6	8



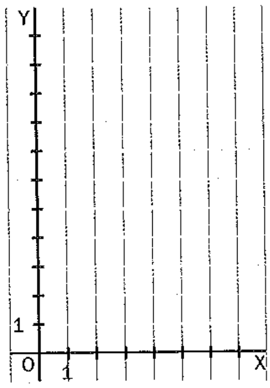
b) La gráfica la forman los ocho puntos de la figura.

c) No tiene sentido unir los puntos, ya que la relación solamente se establece entre los números enteros de la tabla, no entre los valores intermedios.

346 Consideramos como abscisas los números naturales del 1 al 6 y les asignamos el doble de dicho número menos 1.

a) Escribe la fórmula que le corresponde a la expresión anterior y, a partir de ella, construye una tabla de valores.

x	1	2	3	4	5	6
y						



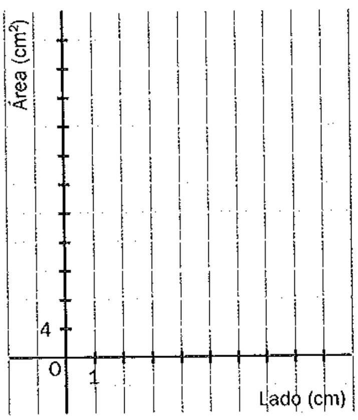
b) Dibuja la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

347 El área, *y*, de un rectángulo de lados *x* y *x* + 1 viene dada por la fórmula: $y = x \cdot (x + 1)$.

a) Elabora una tabla de valores. Ten en cuenta que *x* solo puede tomar valores positivos, puesto que no tiene sentido una longitud negativa.

Lado (cm)					
Área (cm²)					



b) Dibuja la gráfica correspondiente.

c) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

3 ¿Función o no función?

- Una **función** es una relación entre dos magnitudes, de manera que a cada valor de la primera magnitud se le asocia un **único valor** de la segunda. Por tanto, en la gráfica de una función no puede haber dos puntos con la misma abscisa.
- La primera magnitud, que se fija previamente, se denomina **variable independiente,** y la segunda, que se calcula a partir de la anterior, **variable dependiente.**

348 Indica cuáles son las variables independiente y dependiente en cada una de estas funciones.

	Variable independiente	**Variable dependiente**
La velocidad de un automóvil en cada instante de tiempo	*Tiempo*	*Velocidad*
La longitud de una circunferencia para cada valor del radio		
El coste de un paquete de zanahorias en función de la cantidad que contiene		
El volumen de agua en un embalse en función de la altura que alcanza la misma		

349 Indica razonadamente si las siguientes relaciones definen o no una función.

a) A cada número le corresponde el área del cuadrado que tiene por lado dicho número.

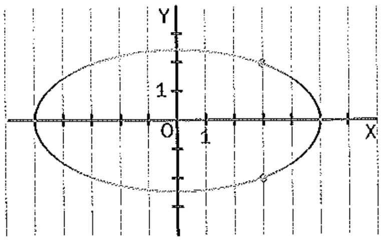
b) A cada día del mes le corresponden las temperaturas máxima y mínima que se han alcanzado ese día.

c) Asignamos al número de pasajeros de distintos autobuses el peso total de los pasajeros.

d) A cada valor de la base de un triángulo le corresponde el valor de su altura.

350 *Se dan a continuación dos relaciones entre variables: una gráfica y una tabla de valores. Explica por qué ninguna de ellas es función.*

a)



b)

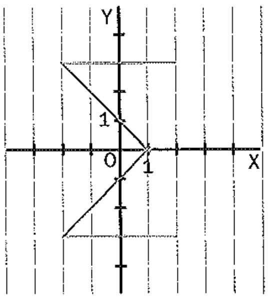
x	y
0	*4*
2	*3*
3	*7*
2	*1*
4	*8*

a) *No es una función.* *Si nos fijamos en la abscisa 3, por ejemplo, observamos que la gráfica le asocia dos ordenadas: 2 y −2. Es decir, la recta paralela al eje de ordenadas (eje vertical) que tiene abscisa 3 corta la gráfica en dos puntos.*

b) *No es función*, *ya que al valor 2 de la variable* x *la tabla le asigna dos valores, 3 y 1.*

351 Indica cuáles de las siguientes relaciones son funciones y cuáles no, justificando la respuesta.

a)



b)

x	*y*
2	1
1	2
2	3
1	4
2	5

c) $y = x - 4$

d)

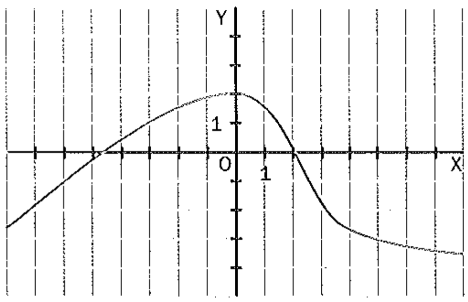
x	*y*
−4	2
−2	2
0	2
2	2
4	2

4 Estudio gráfico de funciones: continuidad, crecimiento y decrecimiento

- Para conocer mejor una **función**, se puede realizar un **estudio de su gráfica**.
- Una función se denomina **continua** entre dos valores del eje de abscisas cuando su gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Los puntos donde no es continua la función se llaman **puntos de discontinuidad**.
- Una función es **creciente** entre dos valores del eje de abscisas si, al aumentar el valor de x, aumenta también el valor de y. Una función es **decreciente** si al aumentar el valor de x, disminuye el valor de y.

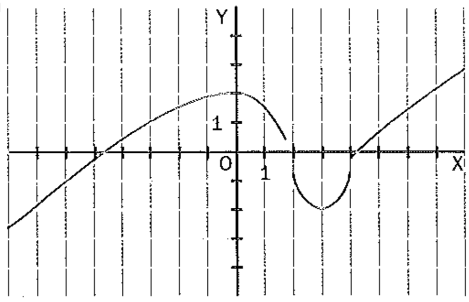
352 ***Observa las gráficas de estas funciones y señala si son continuas entre*** $x = 0$ ***y*** $x = 5$.

a)



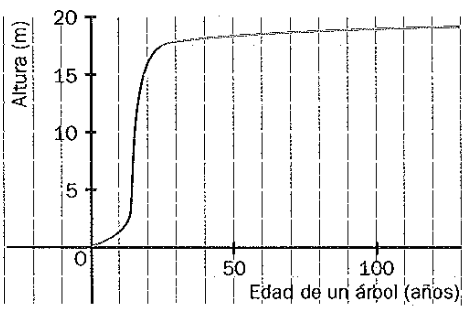
La función es continua entre 0 y 5.

b)



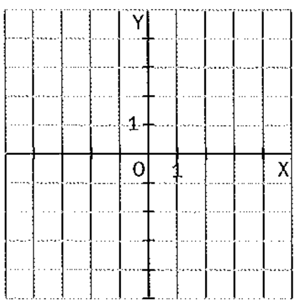
La función no es continua en el tramo indicado, porque para dibujarla hay que levantar el lápiz en los puntos $x = 2$ *y* $x = 4$.

353 Indica si esta función es continua. En caso negativo, señala las discontinuidades.

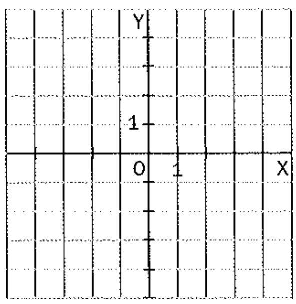


354 Dibuja dos funciones que tengan las siguientes características.

a) Continua entre $x = -4$ y $x = 4$



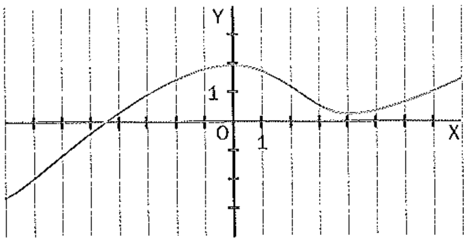
b) Puntos de discontinuidad en $x = -3$ y $x = 2$



355 *Señala si la función representada en esta gráfica es creciente o decreciente entre los valores indicados.*

a) $x = -3$ y $x = 0$

b) $x = 0$ y $x = 4$



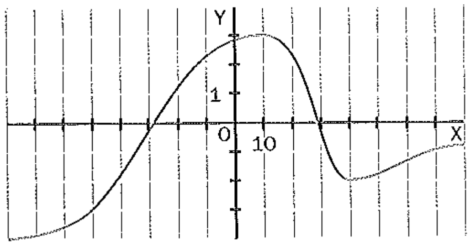
a) *Es creciente entre −3 y 0, ya que cuando vamos siguiendo la gráfica hacia la derecha (aumentando el valor de x), la gráfica sube (aumenta el valor de y).*

b) *Es decreciente entre 0 y 4, ya que cuando aumenta el valor de x, disminuye el valor de y.*

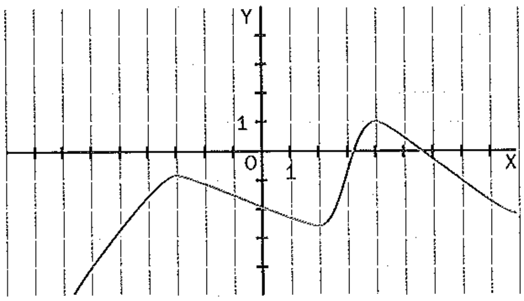
356 Señala si la gráfica siguiente corresponde a una función creciente o decreciente entre los valores indicados del eje de abscisas.

a) $x = 10$ y $x = 30$

b) $x = 40$ y $x = 60$

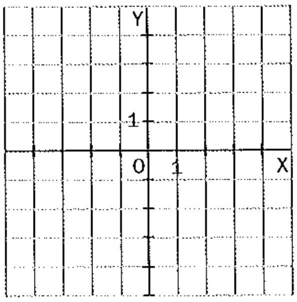


357 Indica entre qué valores de x la siguiente función es creciente y entre cuáles es decreciente.

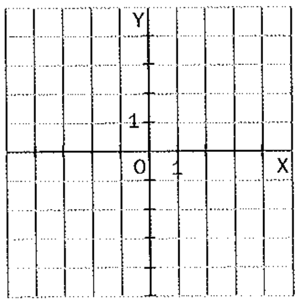


358 Dibuja dos funciones que cumplan las siguientes condiciones.

a) Creciente entre $x = -2$ y $x = 3$, y decreciente entre $x = 3$ y $x = 5$



b) Creciente entre $x = -3$ y $x = 2$, y creciente entre $x = 2$ y $x = 4$



5 Estudio gráfico de funciones: máximos, mínimos y cortes con los ejes

El estudio gráfico de una función se puede completar analizando dónde se encuentran:

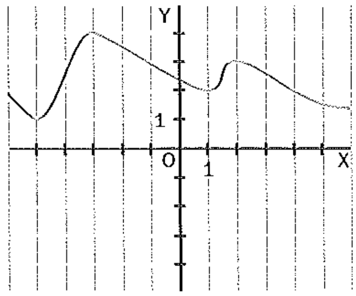
- Los puntos más altos de una gráfica **(máximos)** y los más bajos **(mínimos)**.
- Los puntos donde la gráfica **corta al eje** de abscisas y al de ordenadas.

359 ***Observa esta gráfica y señala las coordenadas de sus puntos máximos y mínimos.***

El punto más alto de toda la gráfica es el que tiene la mayor ordenada, en este caso, y = 4. Su abscisa vale −3. Por tanto, las coordenadas del máximo absoluto son (−3, 4).

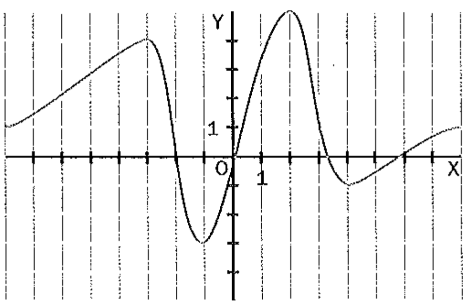
Observamos que el punto (2, 3) es el más alto en la zona cercana al mismo. Por eso decimos que (2, 3) es un máximo relativo.

Del mismo modo, podemos observar que la gráfica tiene un mínimo absoluto en el punto (−5, 1) y un mínimo relativo en el punto (1, 2).

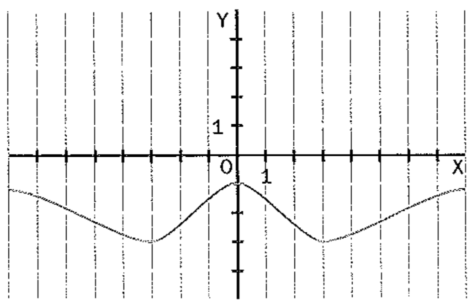


360 Indica las coordenadas de los puntos máximos y mínimos de las siguientes funciones.

a)



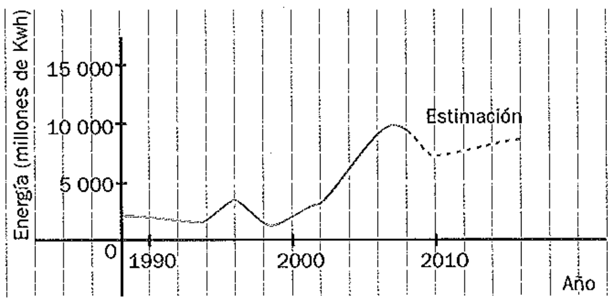
b)



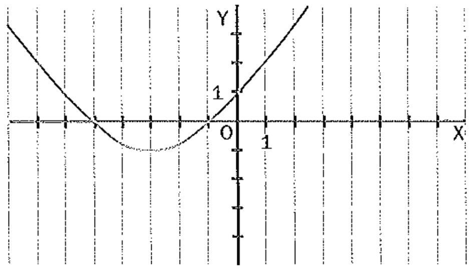
361 La siguiente gráfica muestra la energía eléctrica producida en instalaciones eólicas en un país durante varios años.

a) ¿En qué año se alcanzó la máxima producción?

b) Indica si la función es creciente o decreciente en los años anteriores a alcanzarse el máximo de producción. ¿Qué ocurre en los años inmediatamente posteriores?



362 ***Observa esta gráfica y escribe cuáles son los puntos de corte con los ejes.***



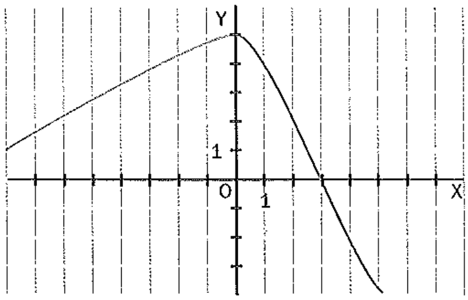
La gráfica corta dos veces el eje de abscisas y una vez el eje de ordenadas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas son $\boxed{(-5,\ 0)\ \text{y}\ (-1,\ 0)}$.

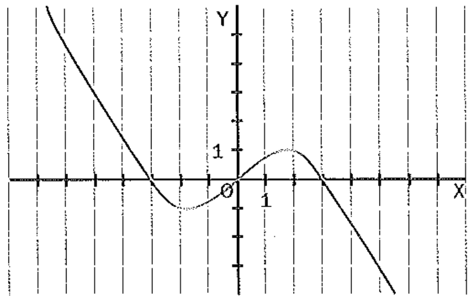
El punto de corte con el eje de ordenadas es $\boxed{(0,\ 1)}$.

363 Señala los puntos de corte de estas gráficas con los ejes.

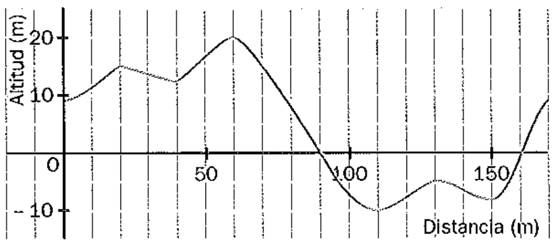
a)



b)



364 Una expedición espeleológica se ha adentrado en una gruta que discurre por debajo del nivel del mar en algunos tramos. La gráfica muestra la altitud en función de la distancia recorrida en la gruta.



a) ¿Es una función continua?

b) Indica en qué tramos es creciente y en cuáles decreciente.

c) ¿Cuál es la altitud máxima que alcanza la gruta? ¿A qué distancia de la entrada se encuentra?

d) ¿Cuál es la mayor profundidad de la gruta? ¿Dónde se alcanza?

e) ¿En qué puntos la gruta se encuentra al nivel del mar?

6 Proporcionalidad directa y funciones

- Las funciones del tipo $y = mx$ se llaman **funciones de proporcionalidad directa**. Su gráfica es una recta que pasa por el origen (0, 0).
- El coeficiente m se llama **pendiente** de la recta y mide la inclinación de la recta con respecto al eje OX.

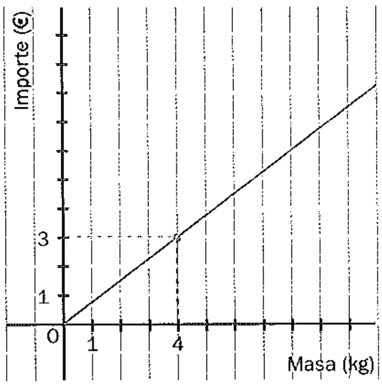
365 ***Un melón de 4 kilogramos nos ha costado 3 euros. Escribe una fórmula que relacione la masa (x) de esos melones con el importe (y) de la compra. Representa la gráfica de dicha función.***

Las magnitudes masa e importe son directamente proporcionales. Cuantos más melones (x) compremos, más nos costarán (y). Entonces: $y = mx$

Tendremos que determinar el valor de m, que es la pendiente. En el enunciado nos dan dos valores para poder calcularla: $y = 3$ *euros y* $x = 4$ *kilogramos. Sustituyendo sabremos el valor de* m.

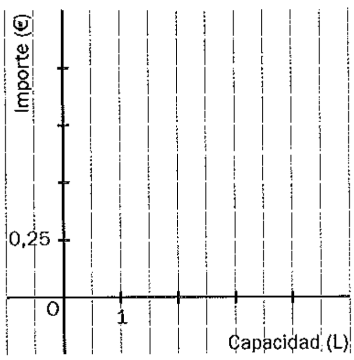
$$y = mx \Rightarrow 3 = m \cdot 4 \Rightarrow m = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

La fórmula buscada es: $\boxed{y = 0{,}75x}$



Para obtener su gráfica necesitamos solamente dos puntos. Uno será el (0, 0), pues toda función de proporcionalidad directa pasa por el origen, y otro puede ser el (4, 3), que nos da el enunciado. Se podría sustituir en la fórmula un valor de x y obtener otro punto. Si se hace esto, hay que tener en cuenta que los valores que se den a x tendrán que ser positivos, pues una masa no puede ser negativa.

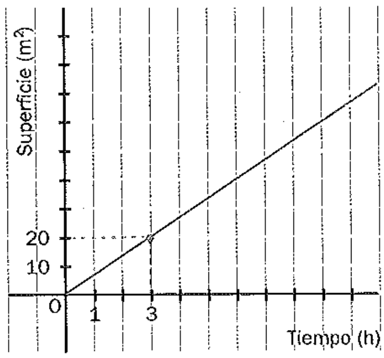
366 Mónica ha comprado agua mineral a 0,25 euros el litro. Escribe la función de proporcionalidad directa que relaciona el importe de la compra de agua con la capacidad de esta, y represéntala gráficamente.



367 La siguiente gráfica nos da la relación entre el número de metros cuadrados de pared pintados por un profesional y el tiempo empleado.

a) ¿Qué superficie pinta en 3 horas? ¿Y en 1 hora?

b) Escribe la fórmula que relaciona la superficie pintada con el tiempo empleado.

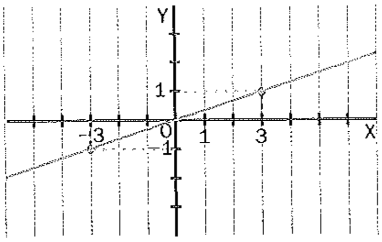


368 Dibuja las gráficas de las siguientes funciones de proporcionalidad directa.

Ejemplo $y = \frac{1}{3}x$

Para obtener ordenadas enteras, damos a las abscisas valores múltiplos de 3.

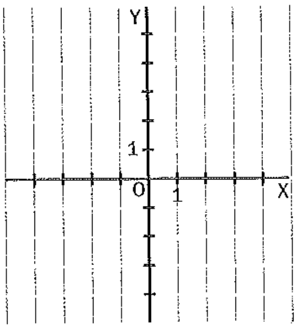
Para dibujar la recta es suficiente dar dos valores, el tercer punto puede servirnos de comprobación:



x	*0*	*3*	*−3*
y	*0*	*1*	*−1*

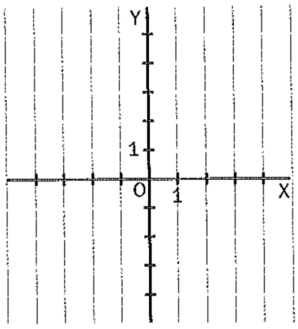
a) $y = 2x$

x	**y**



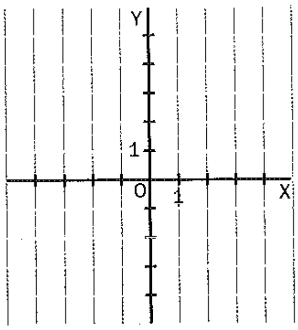
c) $y = -2x$

x	**y**



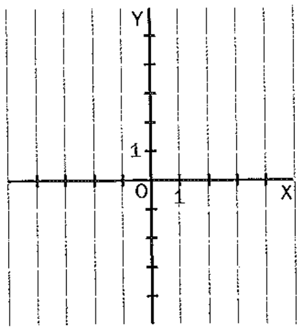
b) $y = \frac{1}{2}x$

x	**y**

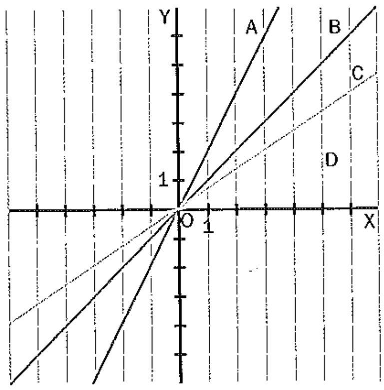


d) $y = -\frac{1}{2}x$

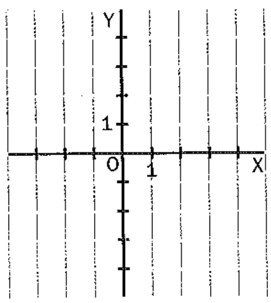
x	**y**



369 Ordena las rectas de la figura de menor a mayor pendiente.



370 Dibuja la gráfica de la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto (2, 5). Escribe la fórmula correspondiente.



7 Proporcionalidad inversa y funciones

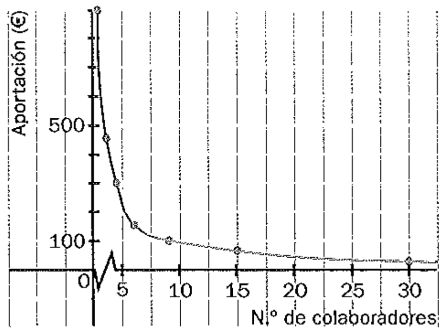
Las funciones del tipo $y = \frac{k}{x}$ se llaman **funciones de proporcionalidad inversa.**

371 ***Una asociación necesita 900 euros para llevar a cabo un programa de integración de personas con discapacidad. Para reunirlos, va a buscar colaboradores.***

Escribe la fórmula de la función que relaciona el número de colaboradores que consigue la asociación con la cantidad que aporta cada uno. Representa dicha función.

Cuantos más colaboradores consiga, menor será la cantidad que tenga que aportar cada uno. Por tanto, ambas magnitudes (número de colaboradores, x, y aportación de cada uno, y) son inversamente proporcionales y estarán relacionadas en la fórmula $y = \frac{k}{x}$.

x	1	2	3	6	9	15	30
y	900	450	300	150	100	60	30



Si solo hubiera un socio, tendría que aportar 900 euros. Entonces,

$$y = \frac{k}{x} \Rightarrow 900 = \frac{k}{1} \Rightarrow k = 900 \cdot 1 = 900$$

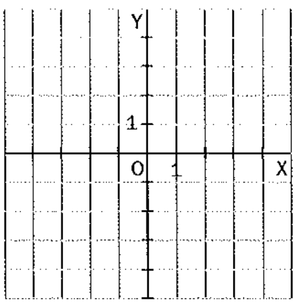
La fórmula es $\boxed{y = \frac{900}{x}}$

372 Dos magnitudes inversamente proporcionales están relacionadas por una función que puede representarse mediante esta tabla.

x	−4	−2	−1	1	2	4
y	−1	−2	−4	4	2	1

a) Escribe la fórmula de la función.

b) Representa su gráfica.



373 Completa la siguiente tabla sabiendo que corresponde a una función de proporcionalidad inversa y escribe la fórmula de dicha función.

x	3				
y	8				

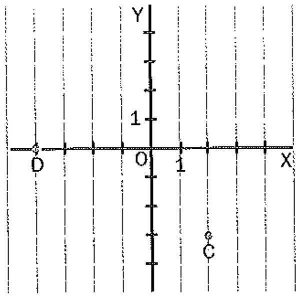
COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

9. Gráficas y funciones

1 Observa el plano de la figura.

a) Escribe las coordenadas de los puntos *C* y *D*.

b) Representa en el plano los puntos *A*(−2, 3) y *B*(4, 0).



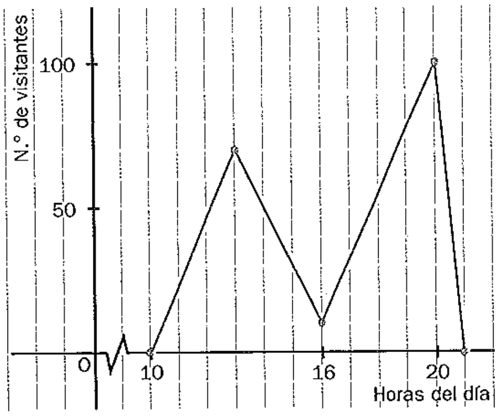
2 La siguiente gráfica muestra el número de visitantes de una exposición científica según la hora a lo largo de un día.

a) ¿Cuál es el horario de la exposición?

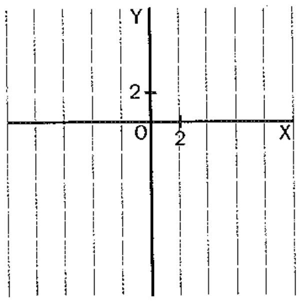
b) ¿Cuántos visitantes hay a las 16 horas? ¿Y a las 20 horas?

c) ¿A qué hora hay más visitantes? ¿Cuántos son?

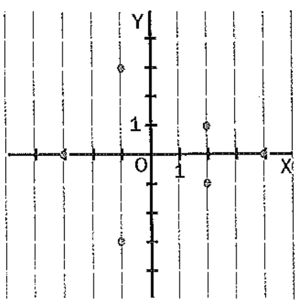
d) ¿En qué períodos de tiempo aumenta o disminuye el número de visitantes?



3 Describe mediante una tabla, una fórmula y una gráfica la función dada por la siguiente expresión: "A un número entero comprendido entre −3 y 3, ambos excluidos, se le asigna el triple del número menos tres".

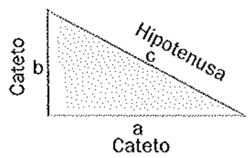


4 Observa la siguiente gráfica y determina si es o no una función. Explica por qué.



5 ¿Distingues un triángulo rectángulo?

Para saber si un triángulo es rectángulo, se pueden medir sus lados, a, b y c, y comprobar si cumplen el **teorema de Pitágoras**: $a^2 + b^2 = c^2$, donde c es el lado mayor.



283 ***Un triángulo tiene los lados iguales a 10, 24 y 26 centímetros. ¿Es rectángulo?***

Comprobamos si los lados cumplen el teorema de Pitágoras:

$$10^2 + 24^2 = 100 + 576 = 676 = 26^2$$

Como lo cumplen, es un $\boxed{\textit{triángulo rectángulo}}$.

284 Indica si son triángulos rectángulos los que tienen lados de estas medidas.

a) 9 cm, 12 cm, 15 cm

b) 4 cm, 7 cm, 8 cm

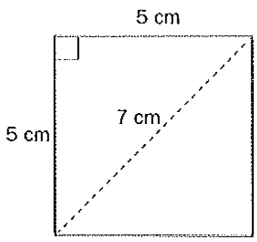
c) 11 cm, 13 cm, 17 cm

d) 8 cm, 15 cm, 17 cm

e) 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm

f) 10 cm, 8 cm, 6 cm

285 ¿Pueden ser correctas las medidas indicadas en el cuadrado de la figura?

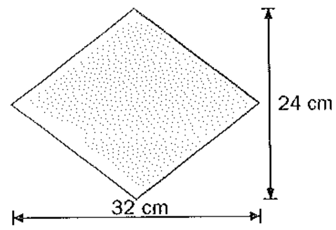


286 ***Queremos construir un rombo cuyas diagonales midan 24 y 32 centímetros. Una vez construido, medimos un lado y obtenemos como resultado 21 centímetros. ¿Lo hemos medido correctamente?***

Como observamos en la figura, las mitades de las diagonales forman un triángulo rectángulo junto con el lado. Comprobamos si se verifica el teorema de Pitágoras:

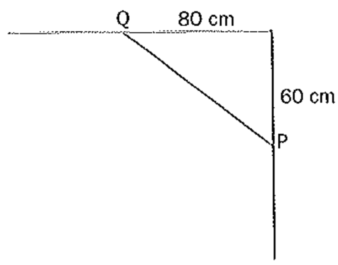
$$12^2 + 16^2 = 144 + 256 = 400 \text{ y } 21^2 = 441$$

Como estas cantidades no son iguales, no se cumple el teorema de Pitágoras, por lo que el lado no mide 21 cm, sino $\sqrt{400} = \boxed{20 \text{ cm}}$.

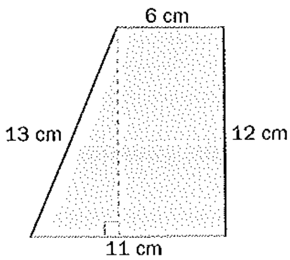


287 Imagina que tienes un marco que no se ajusta correctamente a la superficie de un cuadro, y sospechas que no es rectangular. Mides los lados y la diagonal del marco, obteniendo 80, 100 y 130 centímetros. ¿Es rectangular el marco?

288 Antes de instalar los muebles de una cocina, se quiere comprobar que el ángulo formado por dos paredes es recto. Para ello, se marca un punto, *P*, a 60 centímetros de la esquina sobre una de las paredes, y otro punto, *Q*, a 80 centímetros de la esquina a la misma altura sobre la otra pared. ¿Cuánto debe valer la distancia *PQ* para que ambas paredes sean perpendiculares?

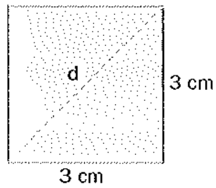


289 En la figura se han anotado las medidas de los lados de un trapecio rectángulo, aunque no se sabe si la medida de 13 centímetros es correcta. Prueba que sí lo es.



6 El teorema de Pitágoras. Aplicaciones

El teorema de Pitágoras se utiliza muchas veces para calcular medidas indirectamente, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado a partir del lado, la apotema de un polígono regular a partir del lado...



290 ***Los siguientes datos corresponden a triángulos rectángulos, donde* a *y* b *representan a los catetos, y* c*, a la hipotenusa. Calcula el lado desconocido en cada caso.***

a) a = ***6 cm,*** b = ***8 cm*** *Aplicamos el teorema de Pitágoras:* $6^2 + 8^2 = c^2 \Rightarrow 36 + 64 = 100 = c^2$

Calculamos la raíz cuadrada: $c = \sqrt{100} = 10$. *La hipotenusa mide* $\boxed{10\ cm}$.

b) b = ***12 cm,*** c = ***13 cm*** $a^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 + 144 = 169 \Rightarrow a^2 = 169 - 144 = 25$

Hallamos la raíz cuadrada: $a = \sqrt{25} = 5$. *El cateto desconocido mide* $\boxed{5\ cm}$.

c) a = b = ***1 cm*** *Aplicamos el teorema de Pitágoras:* $1^2 + 1^2 = c^2 \Rightarrow 2 = c^2$

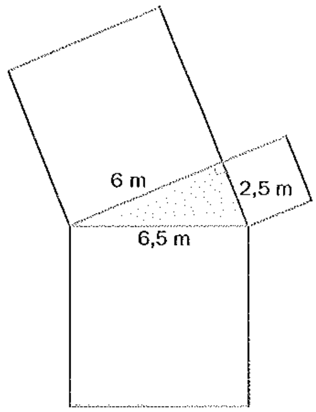
Calculamos la raíz cuadrada: $c = \sqrt{2}$. *El cateto desconocido mide* $\boxed{1{,}41\ cm}$.

291 Calcula el lado desconocido de un triángulo rectángulo con los datos que se dan.

a) $a = 7$ cm, $b = 9$ cm

b) $a = 8$ cm, $c = 17$ cm

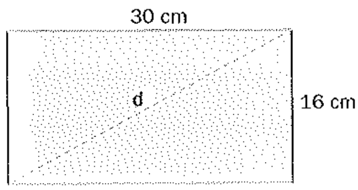
292 Halla el área de cada uno de los cuadrados dibujados sobre los lados del triángulo rectángulo de la figura. Comprueba que la suma de las áreas de los cuadrados correspondientes a los catetos es igual al área del cuadrado correspondiente a la hipotenusa.



293 Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 centímetros, respectivamente. ¿Cuánto mide el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa?

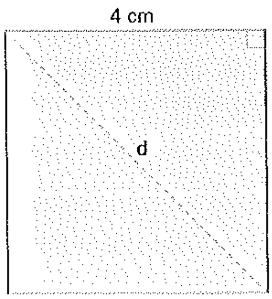
294 ***Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 16 y 30 centímetros, respectivamente.***

Dos lados consecutivos del rectángulo y una de las diagonales forman un triángulo rectángulo, como observamos en la figura. Si representamos la medida de la diagonal con d *y aplicamos el teorema de Pitágoras, obtenemos:*

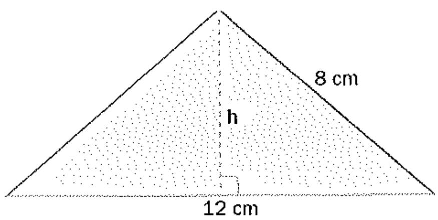


$d^2 = 16^2 + 30^2 = 256 + 900 = 1156 \qquad d = \sqrt{1156} = \boxed{34\ cm}$

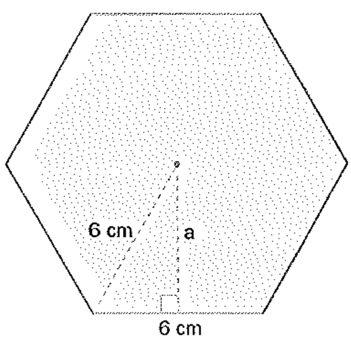
295 Calcula la diagonal de un cuadrado de 4 centímetros de lado.



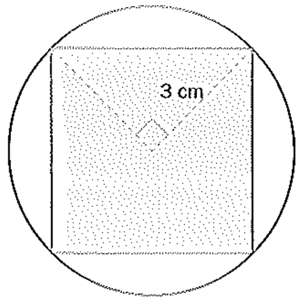
296 Halla la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 centímetros cada uno, y el desigual, 12.



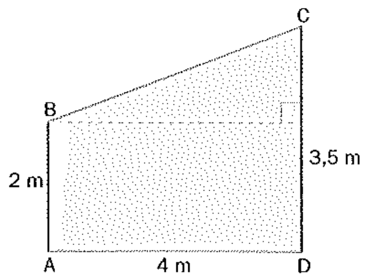
297 Halla la apotema, *a*, de un hexágono regular de 6 centímetros de lado.



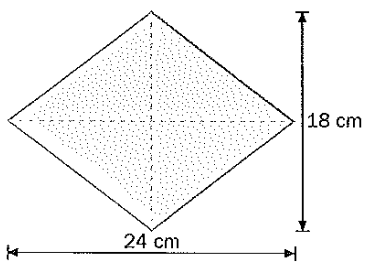
298 Halla el lado del cuadrado inscrito en una circunferencia de 3 centímetros de radio.



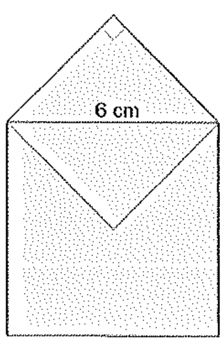
299 Una de las paredes de una habitación abuhardillada tiene forma de trapecio rectángulo, *ABCD*, como indica la figura. En un extremo, la altura de la habitación es de 2 metros, y en otro, de 3,5. Sabiendo que la pared tiene 4 metros de largo, ¿cuál es la longitud del techo, *BC*?



300 Las diagonales de un rombo miden 18 y 24 centímetros. Calcula la medida de su lado.



301 Halla el perímetro de la siguiente figura, formada por dos cuadrados.

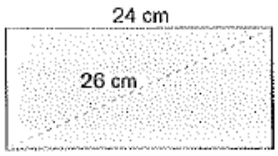


4 **¿Son triángulos rectángulos los que tienen estas medidas?**

a) 4,5 cm, 6 cm, 7,5 cm

b) 8 cm, 14 cm, 16 cm

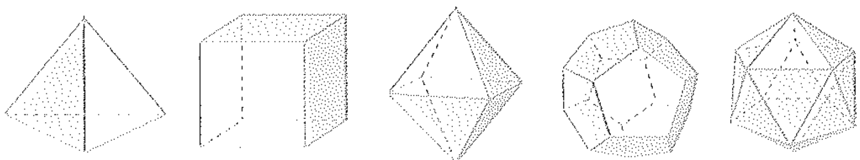
5 **La diagonal de un rectángulo mide 26 centímetros, y su base, 24. Halla la medida del otro lado.**



8. Cuerpos geométricos

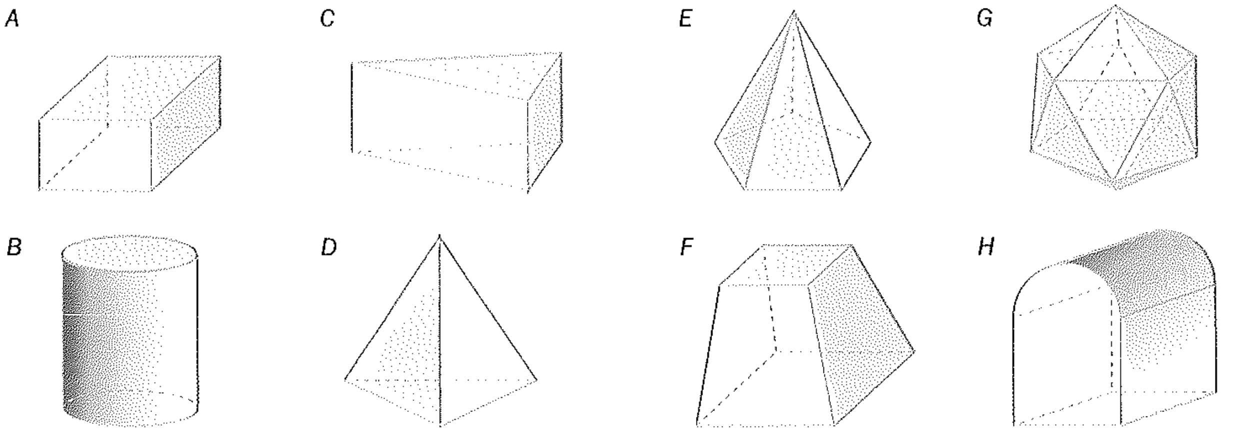
1 Cuerpos con volumen: poliedros

- Un **poliedro** es un cuerpo limitado por cuatro o más polígonos. Los vértices y lados de sus caras son los vértices y las aristas del poliedro.
- Un poliedro es **regular** cuando está limitado por caras iguales y en cada vértice concurre el mismo número de aristas o de caras. Los cinco poliedros regulares son los siguientes:



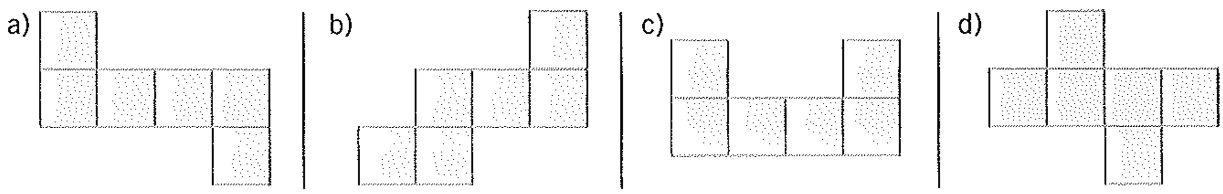
Tetraedro Cubo Octaedro Dodecaedro Icosaedro

302 Entre los siguientes cuerpos geométricos, señala los que son poliedros y cuenta las caras, vértices y aristas que tienen estos.



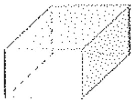
	A	B	C	D	E	F	G	H
Poliedro							*Sí*	
N.° de caras							*20*	
N.° de vértices							*12*	
N.° de aristas							*30*	

303 Señala, entre los siguientes desarrollos planos, aquellos que pertenecen a un cubo.

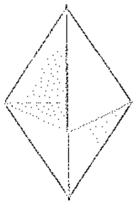


304 Une con flechas cada poliedro con su desarrollo plano.

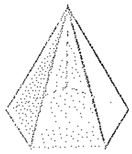
a)



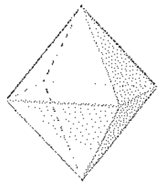
b)



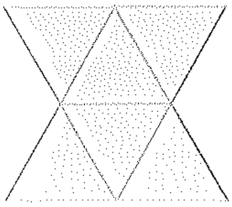
c)



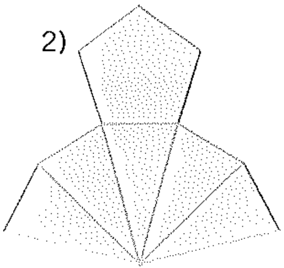
d)



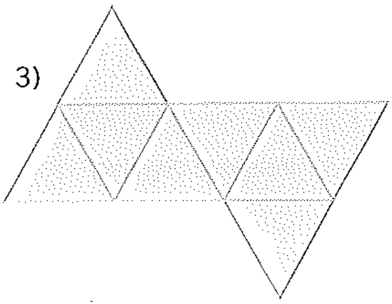
1)



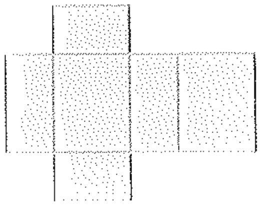
2)



3)

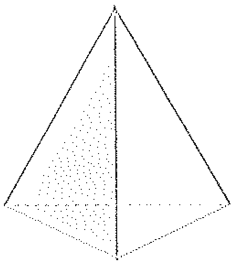


4)

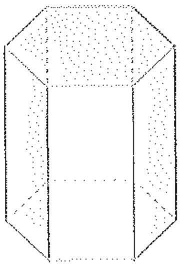


305 Dibuja un desarrollo para los siguientes poliedros.

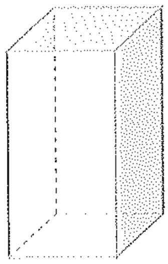
a)



b)



c)



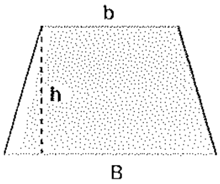
306 Completa la siguiente tabla con los nombres y las características de los cinco poliedros regulares.

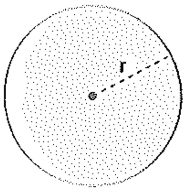
Nombre del poliedro	*Icosaedro*				
Polígono regular que forma sus caras	*Triángulo*				
N.º de caras en cada vértice	*5*				
N.º de caras	*20*				
N.º de vértices	*12*				
N.º de aristas	*30*				

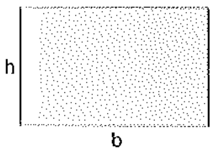
2 ¿Te acuerdas de calcular áreas planas?

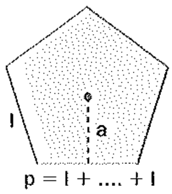
Las **figuras planas simples** tienen fórmulas para calcular su área. Cuando hay que calcular el área de una figura compuesta por varias, se halla el área de cada una de las figuras simples que la forman y se suman.

307 Asocia, mediante flechas, la figura con su nombre y con la fórmula que nos da el área.

a)


b)


c)


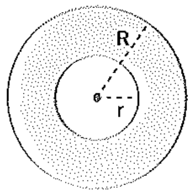
d)


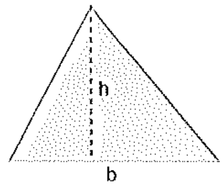
1. Polígono regular
$A = \dfrac{p \cdot a}{2}$

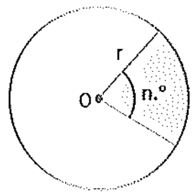
2. Rectángulo
$A = b \cdot h$

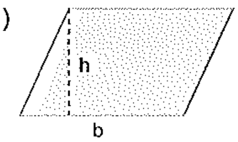
3. Trapecio
$A = \dfrac{(B + b)h}{2}$

4. Círculo
$A = \pi \cdot r^2$

e)


f)


g)


h)


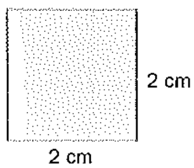
5. Triángulo
$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$

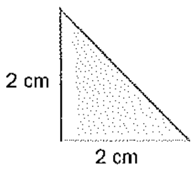
6. Paralelogramo
$A = b \cdot h$

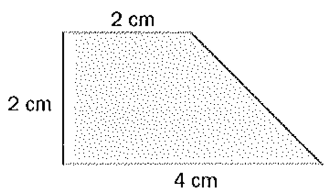
7. Corona circular
$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$

8. Sector circular
$A = \dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot n^\circ}{360^\circ}$

308 Calcula el área de las siguientes figuras.

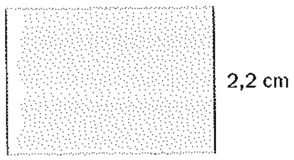
a)


b)


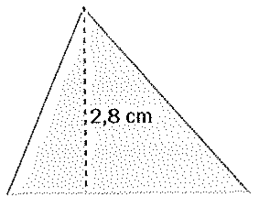
c)


309 Calcula el área de las siguientes figuras.

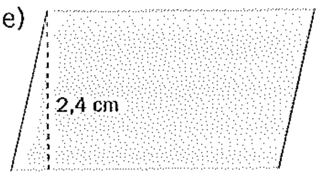
a)



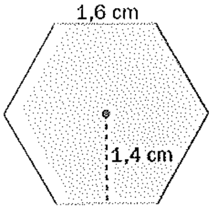
c)



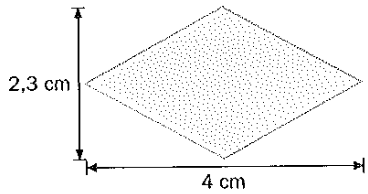
e)



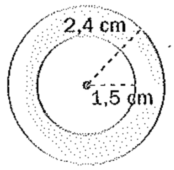
b)



d)

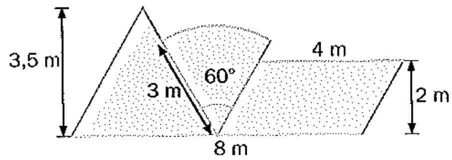


f)



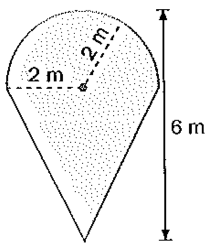
310 ***Calcula el área de la siguiente figura compuesta.***

La figura está formada por un triángulo de base 4 m y altura 3,5 m, un sector circular de radio 3 m y ángulo de 60°, y un paralelogramo de base 4 m y altura 2 m. Hallamos las áreas de cada una de las partes componentes y las sumamos:



$$A = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{\pi \cdot (r^2 \cdot n°)}{360°} + b \cdot h = \frac{4 \cdot 3{,}5}{2} + \frac{3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 60}{360} + 4 \cdot 2 = 7 + 4{,}71 + 8 = \boxed{19{,}71 \ m^2}$$

311 Calcula el área de la siguiente figura. Fíjate que está compuesta por un triángulo y un semicírculo.



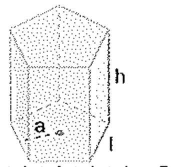
3 Prismas: área y volumen

- **Area** del prisma:

$$A_{Total}\begin{pmatrix} \text{Área lateral: } A_{Lateral} = p \cdot h \\ \text{Área de las bases: } A_{Bases} = 2\,\dfrac{p \cdot a}{2} \end{pmatrix} \quad A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = p \cdot h + p \cdot a$$

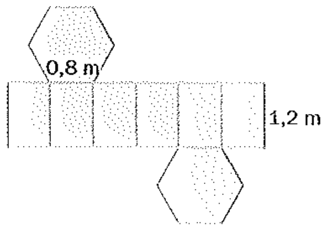
- **Volumen** del prisma: $V_{Prisma} = A_{Base} \cdot h$

p es el perímetro de la base.



$p = l + l + l + l + l = 5l$

312 ***Halla el área total y el volumen del siguiente prisma regular.***

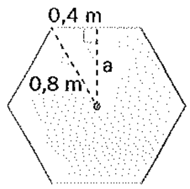


La figura muestra el desarrollo en el plano de un prisma hexagonal regular.

$$\textit{Perímetro de la base: } p = 6 \cdot 0{,}8 \text{ m} = 4{,}8 \text{ m}$$

$$A_{Lateral} = p \cdot h = 4{,}8 \cdot 1{,}2 = 5{,}76 \text{ m}^2$$

Para calcular la apotema aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura:



$$a = \sqrt{0{,}8^2 - 0{,}4^2} = \sqrt{0{,}64 - 0{,}16} = 0{,}7 \text{ m}$$

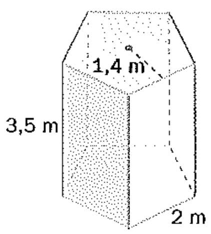
Área de las bases: $A_{Bases} = p \cdot a = (6 \cdot 0{,}8) \cdot 0{,}7 = 4{,}8 \cdot 0{,}7 = 3{,}36 \text{ m}^2$

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = 5{,}76 + 3{,}36 = \boxed{9{,}12 \text{ m}^2}$$

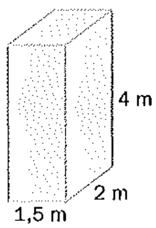
$$V = A_{Base} \cdot h = 1{,}68 \cdot 1{,}2 = \boxed{2{,}01 \text{ m}^3}$$

313 Calcula el área total y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos.

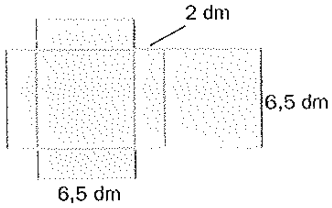
a)



b)



314 Halla el área total y el volumen del prisma correspondiente al siguiente desarrollo.

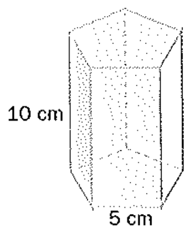


315 ***Calcula el área total y el volumen de los siguientes prismas.***

a) Prisma regular, cuya base es un pentágono de 5 centímetros de lado; la distancia entre el centro del pentágono y un vértice, de 4,2 centímetros, y la altura, de 10 centímetros.

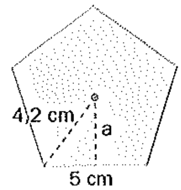
b) Ortoedro de dimensiones 8, 10 y 12 centímetros.

a) Perímetro de la base: $p = 5 \cdot 5\ cm = 25\ cm$. $A_{Lateral} = p \cdot h = 25 \cdot 10 = 250\ cm^2$



La apotema la calculamos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura:

$$a = \sqrt{4{,}2^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{17{,}64 - 6{,}25} = 3{,}4\ cm$$

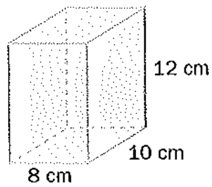


Área de las bases: $A_{Bases} = p \cdot a = 25 \cdot 3{,}4 = 85\ cm^2$

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = 250 + 85 = \boxed{135\ cm^2}$$

$$V = A_{Base} \cdot h = 42{,}5 \cdot 10 = \boxed{425\ cm^3}$$

b)



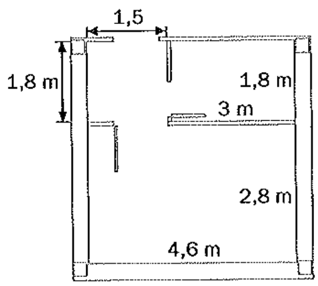
El área lateral es $A_{Lateral} = p \cdot h = (2 \cdot 10 + 2 \cdot 8) \cdot 12 = 432\ cm^2$

El área de las bases es $A_{Bases} = 2 \cdot (10 \cdot 8) = 160\ cm^2$

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = 432 + 160 = \boxed{592\ cm^2}$$

$$V = A_{Base} \cdot h = 80 \cdot 12 = \boxed{960\ cm^3}$$

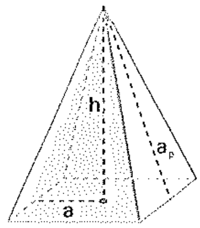
316 Se desea pintar las paredes de las habitaciones del plano de la figura, donde las dimensiones vienen dadas en metros. Sabiendo que el techo se encuentra a una altura de 2,6 metros y que incluimos la superficie de las puertas y de las ventanas, ¿cuál es la superficie total que deseamos pintar?



4 Pirámides: área y volumen

- Área de la pirámide:

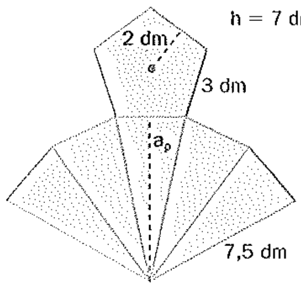
$$A_{Total}\begin{pmatrix} A_{Lateral} = \frac{1}{2}p \cdot a_p \\ A_{Base} = \frac{1}{2}p \cdot a \end{pmatrix} \quad A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \frac{1}{2}p \cdot a_p + \frac{1}{2}p \cdot a$$



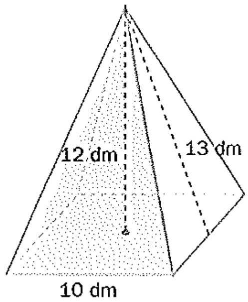
- Volumen de la pirámide: $V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h$

317 ***Halla el área total y el volumen de las siguientes pirámides regulares.***

a)

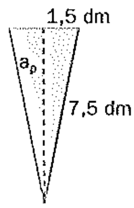


b)



a) La figura muestra el desarrollo en el plano de una pirámide pentagonal regular. El perímetro de la base es p $= 5 \cdot 3 = 15$ *dm.*

La apotema de la pirámide la calculamos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura (una de las caras laterales): $a_p = \sqrt{7{,}5^2 - 1{,}5^2} = 7{,}3$ *dm*



$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \frac{1}{2}(p \cdot a_p + p \cdot a) = \frac{1}{2}(15 \cdot 7{,}3 + 15 \cdot 2) = \boxed{69{,}75\ dm^2}$$

$$V_{Pirámide} = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (15 \cdot 2) \cdot 7 = \boxed{35\ dm^3}$$

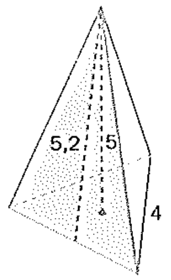
b) Es una pirámide de base cuadrada. El perímetro de la base es p $= 4 \cdot 10 = 40$ *dm y la apotema de la pirámide, de 13 dm.*

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \frac{1}{2}p \cdot a_p + A_{Base} = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 13 + 10 \cdot 10 = \boxed{360\ dm^2}$$

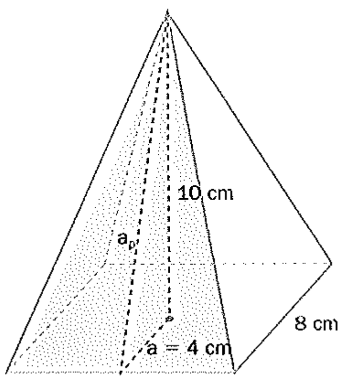
$$V = \frac{1}{3}A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = \boxed{400\ dm^3}$$

318 Una pirámide tiene 7 aristas en la base. ¿Cuántas aristas tiene en total? ¿Cuántos vértices? ¿Cuántas caras?

319 Calcula el área total y el volumen de esta pirámide regular, cuyas medidas vienen en decímetros.



320 Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 8 centímetros de lado y su altura es de 10 centímetros. Halla la apotema de la pirámide, el área total y el volumen.

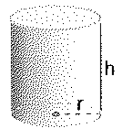


321 De una pirámide regular hexagonal conocemos que su arista lateral mide 26 centímetros, y la de la base, 10 centímetros. Halla la apotema de la pirámide, la apotema de la base, la altura de la pirámide y su volumen, así como su equivalente en litros.

5 Cilindro y cono: áreas y volúmenes

- **Cilindro:**

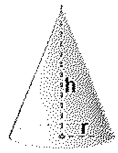
$$A_{Total}\begin{pmatrix} A_{Lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ A_{Bases} = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \end{pmatrix} \quad A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Bases} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$



$$V_{Cilindro} = A_{Base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

- **Cono:**

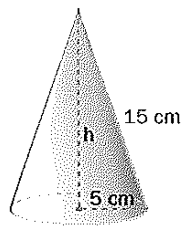
$$A_{Total}\begin{pmatrix} A_{Lateral} = \pi \cdot r \cdot g \\ A_{Base} = \pi \cdot r^2 \end{pmatrix} \quad A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2$$



$$V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

r es el radio de la base, g es la generatriz y h es la altura del cono.

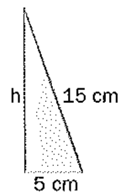
322 ***Halla el área total y el volumen del siguiente cono.***



Para el cálculo del área aplicaremos las fórmulas vistas anteriormente:

$$A_{Total} = A_{Lateral} + A_{Base} = \pi \cdot r \cdot g + \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5 \cdot 15 + \pi \cdot 5^2 = \boxed{314{,}2\ cm^2}$$

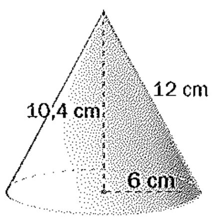
La altura del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo formado por ella, un radio de la base y la generatriz, que se muestra en la figura:



$$h = \sqrt{15^2 - 5^2} = 14{,}1\ cm$$

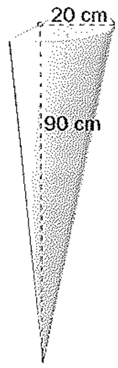
$$V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 14{,}1 = \boxed{369{,}1\ cm^3}$$

323 Determina el área total y el volumen de la siguiente figura.



324 Una piscina con forma cilíndrica tiene un diámetro de 6 metros. Se vierten en ella 45 000 litros de agua. ¿Qué altura alcanza esta?

325 ***Halla el volumen de la siguiente figura y expresa su equivalente en litros.***



La figura corresponde a la mitad de un cono, por lo que calcularemos el volumen total del cono y luego lo dividiremos entre dos.

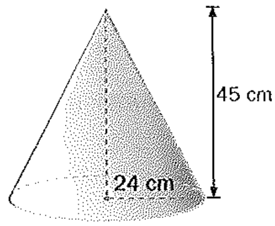
El volumen del cono con base de radio 20 centímetros y altura 90 centímetros es:

$$V_{Cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{Base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20^2 \cdot (90) = 37699{,}1 \text{ cm}^3$$

El volumen de la figura será la mitad que el del cono:

$V = \frac{1}{2} 37699{,}1 = 18849{,}6 \text{ cm}^3 = \boxed{18{,}8496 \text{ dm}^3}$. *Equivale aproximadamente a* $\boxed{19 \text{ litros}}$.

326 Halla el volumen de un tercio del cono de la figura.

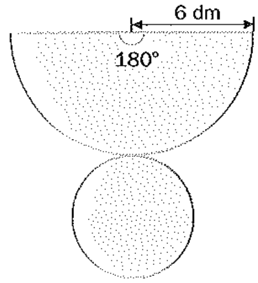


327 El diámetro de la base de una lata de conservas cilíndrica mide 12 centímetros, y la altura de la lata, 9. Una segunda lata tiene 9 centímetros de radio en la base y 4 de altura.

a) Compara los volúmenes de ambas.

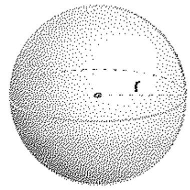
b) ¿Cuál es la que necesita mayor cantidad de hojalata para su construcción?

328 Halla la superficie total de un cono que tiene el desarrollo de la figura de la derecha.



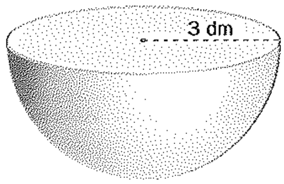
6 La esfera: área y volumen

- **Área de la superficie** de una esfera: $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
- **Volumen** de la esfera: $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$



329 ***Halla el área total y el volumen de la mitad de la esfera.***

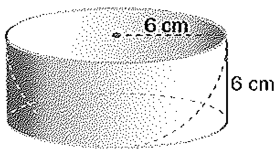
Para calcular el área y el volumen de la semiesfera aplicaremos la fórmula de la esfera, dividiendo entre 2.



Área de la semiesfera: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 3^2 = 18\pi \text{ dm}^2 = \boxed{56{,}5 \text{ dm}^2}$

Volumen de la semiesfera: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot 3^3 = 18\pi = \boxed{56{,}5 \text{ dm}^3}$

330 Un recipiente tiene exteriormente forma cilíndrica, siendo la concavidad interior una semiesfera con el mismo radio que el cilindro, como indica la figura. Determina el volumen útil del recipiente, es decir, el volumen correspondiente a la semiesfera interior.

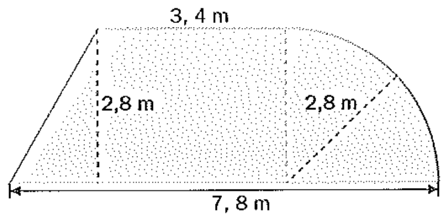


331 El diámetro de un balón mide 20 centímetros. Calcula su volumen.

COMPRUEBA LO QUE HAS APRENDIDO

8. Cuerpos geométricos

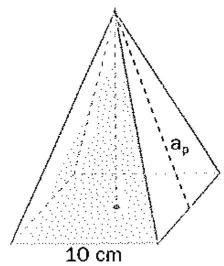
1 Calcula el área de la siguiente figura compuesta, donde las medidas vienen dadas en metros.



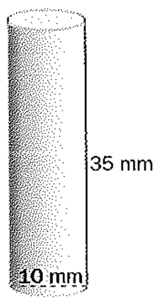
2 Una piscina con forma ortoédrica tiene 4 metros de ancha por 7 de larga. Se vierten en ella 50 000 litros de agua. ¿Qué altura alcanza esta?

3 Calcula el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular con 6 centímetros de lado y 10 centímetros de altura.

4 Una pirámide regular tiene por base un cuadrado de 10 centímetros de lado, y su arista lateral mide 13 centímetros. Halla la apotema de la pirámide y el área total.



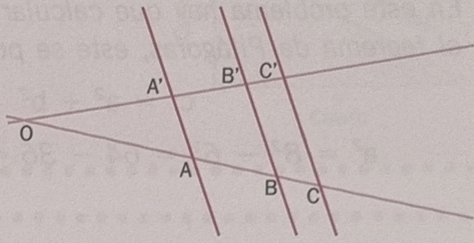
5 Halla el volumen del cilindro representado en la figura, donde las medidas están expresadas en milímetros.



4 El teorema de Tales

Teorema de Tales: "Al cortar, por líneas paralelas, rectas concurrentes, los segmentos correspondientes son proporcionales".

Como consecuencia, la razón entre los lados homólogos de polígonos semejantes es un número constante.

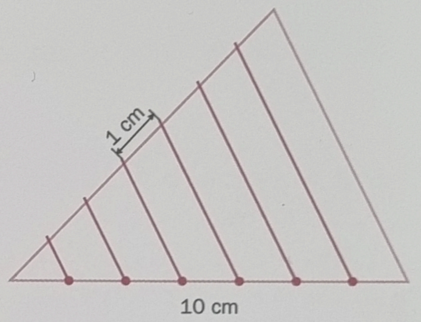


210 ***Divide un segmento de 10 centímetros de longitud en 7 partes iguales.***

Dibujamos el segmento y trazamos otro, de una medida arbitraria (por ejemplo, 7 centímetros), con extremo en uno de sus extremos. Este segundo segmento lo dividimos en 7 partes iguales.

La última parte la unimos mediante una recta con el otro extremo del segmento y luego trazamos paralelas a dicha recta por los puntos en que hemos dividido el segmento.

Los puntos de corte de las rectas con el segmento original nos dan las divisiones del segmento.



211 Divide un segmento de 14 centímetros en 3 partes iguales.

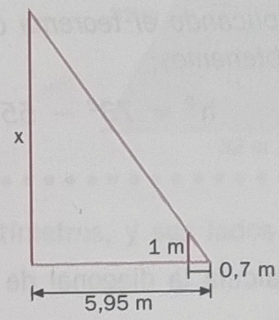
212 Dibuja un segmento de 10 centímetros y divídelo en dos partes de forma que una sea el doble de grande que la otra.

213 Los lados de un triángulo miden 18, 30 y 36 centímetros. Calcula cuánto miden los lados de un triángulo semejante a este cuyo lado menor mida 6 centímetros.

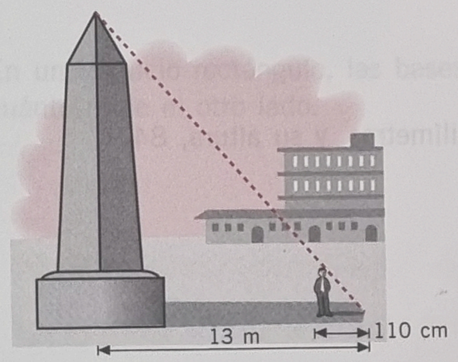
214 ***Sabiendo que un palo vertical de 1 metro de longitud proyecta una sombra de 70 centímetros, ¿qué altura tendrá un árbol cuya sombra mide 5,95 metros?***

Aplicando el teorema de Tales (se puede suponer que los rayos de luz del sol son paralelos) tenemos que:

$$\frac{0{,}70}{5{,}95} = \frac{1}{x} \Rightarrow 0{,}7 \cdot x = 1 \cdot 5{,}95 \Rightarrow x = \frac{5{,}95}{0{,}7} = \boxed{8{,}5 \text{ m}}$$



215 Calcula cuánto mide un obelisco proyecta una sombra de 13 metros cuando una persona de 1,75 metros proyecta una sombra de 110 centímetros.



216 Utilizando el teorema de Tales y el de Pitágoras, calcula la medida de los lados que faltan.